Math. P.
422

Math. P. 422

Matheſis. Analyſis finitor. & infinitorum in genere 35A.

<36604809440012

<36604809440012

Bayer. Staatsbibliothek

Verſuch
einer neuen
Summationsmethode
nebſt andern damit zuſammenhängenden
analytiſchen Bemerkungen.

Von

Johann Friedrich Pfaff.

R

Cum doctrina de ſeriebus maximi ſit momenti in analyſi; ejusmodi ſpeculationes omnino dignæ ſunt habendæ, quæ omni induſtria excolantur.

L. Euler.

Berlin, 1788.
Bei Chriſtian Friedrich Himburg.

ST

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem

Durchlauchtigſten

regierenden

Herrn Herzog Carl

zu Würtemberg und Teck ꝛc. ꝛc.

weyhet dieſe Schrift

in tiefſter Unterthänigkeit

der Verfaſſer.

Durchlauchtigſter Herzog!

Gnädigſter Herzog und Herr!

Euer Herzogl. Durchlaucht geruhen gnädigſt, gegenwärtigen Verſuch als ein geringes, aber reines Opfer der tiefſten Verehrung und lebhafteſten Dankbarkeit huldreichſt aufzunehmen. Ich ergreife dieſe Gelegenheit — nicht um die Lob-

ſprüche zu wagen, welche ein **Erlauchter** Kenner und Beförderer der Wiſſenſchaften verdienet, aber wenig achtet. Eine heiligere und unverdächtigere Pflicht war für mich entſcheidender Beweggrund, — die Pflicht der Dankbarkeit. Ich fühlte mich gedrungen, **Höchſtdenenſelben** öffentlich den tiefſten Dank unterthänigſt darzulegen: für die Erziehung welche ich zehn Jahre lang in jener Anſtalt genoſſen habe, die, zugleich mit dem Andenken ihres **erhabenen Stifters**, ſo vielen darinn gebildeten Zöglingen, auch mir, unvergeßlich bleiben wird; für die beſondere Gnade, womit **Euer Herzogl. Durchlaucht** auch nachher an den fernern Fortſchritten meiner Bildung

höchſten Antheil zu nehmen, und mich auf der dahin abzielenden Reiſe huldreichſt zu unterſtützen geruhet haben. — Ich kenne keine reinere Befriedigung meines Dankgefühls, als anhaltenden und wirkſamen Eifer, das Gepräge meiner Erziehung nicht zu verläugnen, jener Gnade würdiger, und durch Erweiterung meiner Kenntniſſe, in dem Fache, zu deſſen Bearbeitung mich **Höchſtdieſelbe** gnädigſt aufgemuntert haben, nach dem Maaße meiner Kräfte nützlicher zu werden. Möchten **Euer Herzogl. Durchlaucht** gnädigſt geruhen, auch in dieſer öffentlichen Probe meiner wiſſenſchaftlichen Bemühungen, eine Wirkung jenes Eifers zu erkennen, und bei der Güte der

Abſicht die Mängel der Ausführung mit nach-
ſichtsvoller Huld zu entſchuldigen!

Ich verharre in tiefſter Ehrfurcht

Euer Herzogl. Durchlaucht

unterthänig gehorſamſter

Johann Friedrich Pfaff.

Vorbericht.

Der Gedanke, welcher die erſte Veranlaſſung zu nachfolgender Schrift wurde, iſt dieſer: Summen unendlicher Reihen dadurch zu finden, daß man ihre einzelne Glieder ſelbſt in unendliche Reihen auflößt. Auf den erſten Blick ſcheint dieſes Verfahren die Schwierigkeit zu vergrößern, welche gehoben werden ſoll, und vielleicht mag das der Grund geweſen ſeyn, warum daſſelbe bisher weniger iſt gebraucht worden. Man wird gewiſſermaßen überraſcht, wenn man ſich auf dieſem Wege ſo bald am Ziele findet. — Die mannichfaltigen Anwendungen dieſer Methode findet man in der Schrift ſelbſten, durchflochten mit andern damit verwandten Zwiſchen-Unterſuchungen, welche mir, zum Theil, einigermaßen neu, theils in einen andern als den gewöhnlichen Zuſammenhang geſtellt zu ſeyn ſchienen. Jene Anwendungen habe ich, wie man bald

ſehen wird, nicht erſchöpft, die Unterſuchungen nicht alle gänzlich vollendet. Zuweilen begnügte ich mich damit, die Gründe überhaupt anzuzeigen, ohne mich in das Detail der Rechnungen einzulaſſen: z. B. in (XII), wo die ſogenannten reciproken Reihen, bei denen ich jenes Verfahren zuerſt verſuchte, in einer größern Allgemeinheit betrachtet werden; in (XIX), wo Reihen von Bögen unterſucht ſind, deren Tangenten nach einem gewiſſen Geſetze fortſchreiten, durch eine Methode, dergleichen Euler gewünſcht hatte. An beiden Stellen, auch ſonſt, habe ich wenigſtens darzuthun geſucht, worauf es bei der Sache ankomme, und welche Ideen zum Grunde liegen. Solche analytiſche Ideen ſind eigentlich Ausſichten, welche man ſchon in einiger Entfernung bequem gewahr werden, obgleich nicht eher völlig erreichen kann, bis man ſich durch das Medium reſiſtens verwickelter Rechnungen durchgearbeitet hat. Dagegen iſt es auf der andern Seite leicht geſchehen, daß man ſich in der Region der Zeichen verirrt, und das feſte Land deutlicher Begriffe aus dem Geſichte verliehrt. Die Spuhr dahin hie und da wenigſtens anzudeuten, ſchien mir nicht überflüſſig; in einer Lehre, welche, nach dem Urtheile philoſophiſcher Mathematiker, eben aus jenem Grunde noch

nicht von allen Zweifeln befreit iſt. — An manchen Stellen habe ich nur den Gang der Rechnungen dargelegt, und die endlichen Reſultate beigefügt. —

Die erwähnten, und vielleicht andere Anomalien des Vortrags zu erklären, überhaupt, den Geſichtspunkt für die Beurtheilung dieſer Schrift genauer zu beſtimmen, finde ich für dienlich, anzuzeigen, daß ſie, ihrer Entſtehung nach, ein Fragment iſt von ausführlichern Unterſuchungen über die Lehre von den Reihen und ihren Summen, mit welchen ich mich in Göttingen zu beſchäftigen angefangen hatte, und, bei dem Reichthume der daſelbſt befindlichen litterariſchen Hülfsmittel jeder Art, deſto leichter beſchäftigen konnte. Gegenwärtigen Aufſatz habe ich, als eine Probe, der königl. Societät der Wiſſenſchaften, vor meiner Abreiſe übergeben; Ihr Urtheil, viel günſtiger, als ich es erwarten durfte, und insbeſondere der aufmunternde gütige Rath Herrn Hofrath Käſtners, haben mich veranlaßt, denſelben öffentlich bekannt zu machen. Veränderungen, ſo weit ſie die Kürze der Zeit erlaubte, ſchienen mir zu dieſer Abſicht nothwendig, um in vermiſchte Bemerkungen mehr Einheit und Folge zu bringen, und ein gewiſſes Ganze daraus zu bilden; auch iſt manches beigefügt, was ich erſt

nachher entwickelt habe. — Die ſonſt nicht ſehr gewöhnliche Bezeichnungsart unendlicher Reihen und ihrer Summen, wählte ich, außer andern zufälligen Gründen, deswegen, weil dadurch der Vortrag ungemein abgekürzt, und die allgemeine Ueberſicht ſehr erleichtert wird. — Litterariſche Nachrichten habe ich überall eingeſtreut, vornehmlich aus dem Grunde, weil ich es für eine Schuldigkeit, zumal eines angehenden Schriftſtellers halte, zu zeigen, daß er ſich mit dem vorzüglichſten, was über den Gegenſtand ſeines eigenen Nachdenkens iſt geſchrieben worden, wenigſtens eh' er ſeine Ideen öffentlich vorlegt, bekannt zu machen geſucht habe. In der Analyſis iſt dieſe Vorſicht um ſo nothwendiger, da ſie ihre Kenner beſonders in den Stand ſetzt, Wahrheiten für ſich zu erfinden, die vielleicht von andern vorher ſind erfunden worden; wobei man das Vergnügen, etwas zuerſt zu wiſſen, mit demjenigen vertauſchen muß, gleiche Gedanken mit andern vortrefflichen Männern zu haben.

Berlin, im September 1787.

Littera=

I. Litterariſche Nachrichten.

1) Unter einer Menge unendlicher Progreſſionen, deren Snmmen mit der **Quadratur des Kreiſes** zuſammenhängen, haben die **reciproke Reihen der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen** die Aufmerkſamkeit der Analyſten vorzüglich anf ſich gezogen. Ihre allgemeine Form iſt: $1 \pm \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} \pm \frac{1}{4^{2m}} + \&c.$ in inf. **Johann Bernoulli** und **Euler** *) haben zuerſt ihre Summen zu finden gelehrt, welche des erſtgenannten älteren Bruder eifrig, aber vergebens geſucht hatte **).

*) Joh. Bernoulli opp. T. IV. n. 153. Art. 8. — Euler de ſummis ſerierum reciprocarum, Comment. Acad. Petrop. T. VII. p. 124. — Beyde bedienen ſich der gleichen Methode, auf die, wie es ſcheint, jeder für ſich gerathen iſt. Die Gründe, auf welchen der ganze Beweis unmittelbar beruht, ſind von Joh. Bernoulli entdeckt worden. — Sonſt wird man in den Werken dieſes großen Mannes (er war im Calcul vielleicht der erſte ſeiner Zeit) nicht ſelten Ideen finden, welche Euler nachher nur weiter ausgeführt hat, freylich auf eine Art, wodurch ſie gewiſſermaſſen ſein Eigenthum werden.

**) Jacob Bernoulli de ſeriebus infin. pag. 254. „Si quis inveniat nobisque communicet, quod induſtriam noſtram eluſit hactenus, magnas de nobis gratias feret.“ — Joh. Bernoulli, als er gefunden hatte, was ſeinem Bruder verborgen blieb, wünſchte ihn wieder ins Leben zurück, um das Vergnügen dieſer Entdeckung mit ihm theilen zu könne. „O utinam frater ſuperſtes eſſet“ (l. c)

Gegen ihre Methode, wobey die Betrachtung unzähliger für einen Sinus oder Coſinus gehörigen Bogen zum Grunde liegt *), machten **Dan. Bernoulli** und **Cramer** Einwendungen, wodurch **Euler** veranlaßt wurde, eine neue überzeugendere Methode aufzuſuchen, welche er zuerſt in den Miſcell. Berolin. (T. VI.) vortrug. Sie ſetzt andere von ihm entdeckte Summationen voraus, die aus particularen Werthen gewiſſer Integrale abgeleitet ſind. — Auf eben dieſem Grunde beruhet ein ähnliches Verfahren in den Opuſc. Analyt. (Petrop. 1785.) Tom. II. p. 257. &c. **Euler** hält daſſelbe für neu, und ſagt, die verſchiedenen Arten, wie er ſonſt jene Reihen ſummirt habe, beruhen alle auf einer mit andern analytiſchen Operationen weniger übereinſtimmenden Methode, nemlich auf der erwähnten Betrachtung der Sinuſſe; wobey er ſich alſo an die nur angeführte Abhandlung nicht erinnert zu haben ſcheint, auch nicht an ſeinen Beweis in den Inſtit. Calc. Differ. Cap. V. P. II. p. 43, welcher mit dem in den Opuſc. völlig übereinſtimmt **).

*) Eben dieſe Methode findet ſich ſonſt in mehrern andern Schriften, z. B. in *Landens* Mathematical Lucubrations (London 1755) p. 36. &c. mit fernern Anwendungen auf Summen anderer Reihen; in *Warings* Meditat. Analyt. (Cantabr. 1785); in *Ferroni* Nova Theoria Trigonometr. ſubl. &c, einem großen Werke, was, als ein Inbegrif wichtiger analytiſchen Entdekkungen, in Italien mit den übertriebenſten Lobſprüchen iſt angekündigt worden — zwar an weitſchweifigen und verwirrten Rechnungen überflüßig reich, aber an neuen gründlichen Ideen arm iſt —

) **Nicol. Bernoulli (Johanns Sohn, welcher den Wiſſenſchaften viel zu frühe entriſſen wurde) iſt bey der Summirung dieſer Reihen einen ganz eigenen Weg gegangen. Sein Verfahren iſt ſinnreich, aber allzu verwickelt und nur auf den einfachſten Fall anwendbar. — Er bringt, nach mehrern Verwand-

2) Wenn man die Summe der Reihe: $\cos. \varphi \pm \cos. 2\varphi + \cos. 3\varphi \pm \cos. 4\varphi$ &c. als bekannt vorausſetzt, ſo ergeben ſich daraus durch fortgeſetzte Integrationen die Summen anderer Reihen, welche unter dieſen zwoen Formen begriffen ſind:

$$\cos. \varphi \pm \frac{\cos. 2\varphi}{2^{2m}} + \frac{\cos. 3\varphi}{3^{2m}} \pm \frac{\cos. 4\varphi}{4^{2m}} + \&c.$$

$$\mathrm{ſ}. \varphi \pm \frac{\mathrm{ſ}.\ 2\varphi}{2^{2m-1}} + \frac{\mathrm{ſ}.\ 3\varphi}{3^{2m-1}} \pm \frac{\mathrm{ſ}.\ 4\varphi}{4^{2m-1}} + \&c.$$

Die Conſtanten, welche bey jedesmaliger Integration in Rechnung genommen werden müſſen, beruhen auf denen in (1) erwähnten Reihen. Nimmt man aber dieſer ihre Summen noch nicht als bekannt an, ſo findet man dieſelbigen eben durch dieſes Verfahren, wenn man zur Beſtimmung der Conſtanten zween Werthe des veränderlichen Winkels gehörig auswählt.

3) Dieſe Bemerkung hat **Daniel Bernoulli** zuerſt gemacht, nnd **Euler** (der den Gedanken für merkwürdig hielt) weiter ausgeführt, auch zu andern Abſichten angewandt *). — Eh' ich dieſes Verfahren von **Bernoulli** lernte, und das Anſehen dieſes großen Mathematikers mein eigenes Urtheil zurückhalten konnte, ſchien mir dasſelbe zwar einfacher und überzeugender als das **Euleriſche** (1), aber **darin** dieſem nachzuſtehen, daß man das Geſetz der Summen, welches wenigſtens für die eine Art von Reihen, nemlich für die in (1), **Euler** ſchicklich aus-

lungen, die Summation für dieſen Fall auf die Integration einer Differential-Gleichung des zweyten Grades (Comment. Petrop. T. X).

*) Comment. Petrop. nov. Tom. XVII. XIX.

gedrückt und erwieſen hat, nicht in gehöriger Allgemeinheit bequem überſehen kann. **Bernoulli** geſteht dieſe Schwürigkeit ſelbſt, ohne ſie aufzulöſen *). Auch **Euler** hat eine ſolche Vollkommenheit jener Methode nicht gegeben: und da ſeine eigene nur die Reihen in (1) betrift, ſo wäre zumal bey denen in (2) eine genaue vollſtändige Darſtellung, und ein allgemeiner Erweis des Geſetzes nothwendig geweſen.

4) Dieſe Betrachtung veranlaßte mich zu nachfolgender Methode: welche weder Integrationen, noch Summationen anderer minder bekannten Reihen vorausſetzt, ſondern nur auf einer einfachen Combination zweener auch ſonſt gebräuchlichen Sätze beruht. Man löſet nemlich die Sinuſſe und Coſinuſſe von φ, 2φ u. ſ. w. in unendliche Reihen auf, ordnet dieſe zuſammen nach den Potenzen von φ, und gebraucht dabey nur noch den Satz, daß für gerade bejahte m, die Summe der unendlichen Reihe: $1 - 2^m + 3^m$ &c. oder $\Sigma \pm n^m = 0$ ſey **). Auf dieſe Weiſe ergiebt ſich ſogleich ein allgemeiner Ausdruck für die Summen der Reihen in (2); man überſieht ihren Zuſammenhang mit den Progreſſionen in (1), und kann daraus unmittelbar auch für dieſe das Geſetz der Summen ableiten. — Da das Verfahren, welches dabey zum Grunde liegt, ſo viel ich weiß, noch von keinem der

*) — — Quamquam hac de re legem condere generalem opus difficile putem — (l. c.) *J. Landen* in den Mathematical Memoirs (Lond. 1780) gebraucht auch die Bernoulliſche Methode, doch ohne einen allgemeinen Ausdruck dadurch zu geben —

**) *Euler* Inſtit. Calc. Differ P. II p. 500. — Es ſey mir verſtattet, bey den nachfolgenden Unterſuchungen immer (wenn nicht etwas anders ausdrücklich erinnert wird) durch das Zeichen Σ die Summe einer unendlichen Reihe anzudeuten, deren allgemeines Glied diejenige Function des

vielen Schriftſteller, welche über Reihen von Coſinuſſen und Sinuſſen geſchrieben haben, gebraucht worden iſt, und analogiſch auch in mehrern andern Fällen, deren einige unten vorkommen ſollen, mit Vortheil angewandt werden kann — ſo ſchien mir die Entwicklung deſſelben auch nach dieſen Rückſichten nicht überflüßig zu ſeyn. —

II. Einzelne Fälle der Reihe (I. 2.)

Obgleich das allgemeine Geſetz der Summen dieſer Reihen, von der Entwicklung einzelner Fälle unabhängig iſt, und nicht erſt aus dieſen durch allmähliges Fortſchreiten gebildet werden muß, ſo wird es doch zur leichtern Ueberſicht des ganzen Verfahrens dienlich ſeyn, die zween einfachſten Fälle im voraus abgeſondert zu betrachten. Es iſt gleichgültig, ob man mit den Coſinuſſen oder Sinuſſen den Anfang macht. Ich wähle das letztere.

1) Nun für den einfachſten Fall $m = 1$ findet ſich durch das im allgemeinen angezeigte Verfahren, die Summe der Reihe:

$$\text{ſ.}\ \varphi - \tfrac{1}{2}\ \text{ſ.}\ 2\ \varphi + \tfrac{1}{3}\ \text{ſ.}\ 3\ \varphi - \&\text{c. in inf.} = S$$

alſo: man gebrauche ſtatt der Sinuſſe ihre Ausdrückungen durch unendliche Reihen, ſo verwandelt ſich jene Reihe in folgende:

Indicis n iſt, welche nach dem Zeichen geſchrieben ſteht. So iſt alſo $\Sigma\, N$ die Summe aller Werthe von N, von $n = 1$ an bis $n = \text{inf}$ genommen. Unter $\Sigma \pm N$ verſtehe ich die Summe einer unendlichen Reihe mit abwechſelnden Zeichen, deren erſtes Glied bejaht, das andere verneint iſt u. ſ. w. — Ich wähle dieſe Bezeichnungsart, weil dadurch der Druck ungemein erleichtert, und viel Raum erſpart wird. — Auch iſt ſie an ſich ganz verſtändlich, und zur allgemeinen Ueberſicht bequem —

$$\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1\ldots5} - \&c.$$

$$- \tfrac{1}{2}\left(2\varphi - \frac{2^3\varphi^3}{1.2.3} + \frac{2^5\varphi^5}{1\ldots5} - \&c.\right)$$

$$+ \tfrac{1}{3}\left(3\varphi - \frac{3^3\varphi^3}{1.2.3} + \&c.\right)$$

$$- \&c.$$

Ordnet man nach den Potenzen von φ, ſo wird der Coefficient der erſten Potenz, $= 1 - 1 + 1$ &c. in inf. $= \frac{1}{2}$; der 2ten, $= \frac{-1}{1.2.3} \Sigma \pm n^2 = 0$ (nach dem in I. 4. angeführten Satze.) Eben ſo verſchwinden die Coefficienten-Reihen der höhern Potenzen: Alſo bleibt $S = \Sigma \pm \frac{1}{n}$ ſ. $n\varphi = \frac{\varphi}{2}$. Setzt man vor φ, $\pi - \varphi$: ſo entſteht daraus; $\Sigma + \frac{1}{n}$ ſ. $n\varphi = \frac{\pi - \varphi}{2}$.

2. Es ſey ferner $m = 2$, ſo wird durch das nur gebrauchte Verfahren $\Sigma \pm \frac{1}{n^3}$ ſ. $n\varphi = S$ in folgende unendlichen Ausdrückungen verwandelt:

$$\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1..5} - \&c.\ \text{in inf.}$$

$$- \frac{1}{2^3}\left(2\varphi - \frac{2^3\varphi^3}{1.2.3} + \frac{2^5\varphi^5}{1..5} - \&c.\right)$$

$$+ \frac{1}{3^3}\left(3\varphi - \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

Ordnet man ſolche nach den Potenzen von φ, ſo wird der Coefficient der erſten Potenz $= \Sigma \pm \frac{1}{n^2}$; der dritten $= \frac{-1}{1.2.3} \Sigma \pm n^0 = \frac{-1}{12}$; der fünften $= \frac{+1}{1..5} \Sigma \pm n^2 = 0$. Gleicherweiſe fallen die höhern Potenzen weg. Alſo wird $S = \varphi . \Sigma \pm \frac{1}{n^2} - \frac{\varphi^3}{12}$. Man ſetze $\varphi = \pi$, ſo iſt, weil $ſ.\, m\pi = 0$, auch $S = 0$, alſo $\Sigma \pm \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Daraus folgt die Summe eben dieſer Reihe mit gleichen bejahten Zeichen unmittelbar: ſie iſt nemlich, wie eine leichte Betrachtung zeigt, doppelt ſo groß als die nur gefundene Summe: alſo $\Sigma \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ — Ferner wird $S = \frac{\pi^2 \varphi - \varphi^3}{12}$, und ſtatt φ, $\pi - \varphi$ geſetzt:

$$\Sigma \frac{1}{n^3} ſ.\, n\varphi = \frac{\pi^2 (\pi - \varphi) - (\pi - \varphi)^3}{12}.$$

III. Allgemeine Summation.

1) Aus der Entwicklung dieſer zween Fälle überſieht man leicht, worauf es bey gegenwärtigem Verfahren im allgemeinen ankommt. Für jedes ganze m ſey die Summe der unendlichen Reihe: $ſ.\, \varphi - \frac{ſ.\, 2\varphi}{2^{2m-1}} + \frac{ſ.\, 3\varphi}{3^{2m-1}} - \&c. = S = \Sigma \pm \frac{ſ.\, n\varphi}{n^{2m-1}}$. Man löſe die Sinuſſe in ihre Progreſſionen auf, und ordne ſolche nach den Potenzen von

φ, ſo iſt ſichtbar, daß die Coefficienten-Reihen derjenigen Potenzen, welche einen größern Exponenten als $2m - 1$ haben, verſchwinden: die Summe der letzten Reihe, welche übrig bleibt, und zu der $2m - 1$ten Potenz gehört, iſt $= \frac{1}{2}$; die Summe der vorhergehenden $= \Sigma \pm \frac{1}{n^2}$; u. ſ. w. Alſo wird $S = \varphi \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-2}}$

$$- \frac{\varphi^3}{1.2.3} . \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-4}} + \&c. \mp \frac{\varphi^{2m-3}}{1.2\ldots 2m-3} \Sigma \pm \frac{1}{n^2}$$

$$\pm \frac{\varphi^{2m-1}}{1\ldots 2m-1} . \tfrac{1}{2}.$$

2) Man ſetze $\varphi = \pi$, ſo wird (wie in II. 2.) $S = 0$, alſo mit π^{2m-1} dividirt, und ſtatt m, $m + 1$ geſchrieben:

$$0 = \pi^{-2m} \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m}} - \frac{\pi^{-2m+2}}{1.2.3} . \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-2}} + \&c..$$

$$\mp \frac{\pi^{-2}}{1\ldots 2m-1} . \Sigma \pm \frac{1}{n^2} \pm \frac{1}{1..2m+1} . \frac{1}{2}$$

Dieſe Gleichung drückt auf eine einfache leicht zu überſehende Weiſe das Geſetz aus, nach welchem die Summen der reciproken Reihen der geraden Potenzen natürlicher Zahlen, mit **abwechſelnden Zeichen** fortgehen. **Euler** *) hat daſſelbe Geſetz, durch die vorhin erwähnte Methode, herausgebracht: die Uebereinſtimmung mit dem gegenwärtigen zeigt eine leichte Vergleichung. Er ſetzt gleich Anfangs, wenn ich ſtatt der dortigen Zeichen, die meinigen gebrauche, $\Sigma \pm \frac{1}{n^2} = A\pi^2$; $\Sigma \pm \frac{1}{n^4} = B\pi^4$ u. ſ. w. und findet ſo eine Gleichung zwiſchen A, B u. ſ. w.

*) Opuſc. Analyt. Tom. II. l. c.

Jenes ſchien mir hier nicht verſtattet zu ſeyn, weil man dabey die Form der Summen, und ihren Zuſammenhang mit der Quadratur des Kreiſes ſchon als bekannt voraus-ſetzt: welche Vorausſetzung erſt durch den Beweis ſelbſt gerechtfertiget wird.

3) Setzt man in (1) vor φ, $\pi - \varphi$, ſo ergiebt ſich daraus $\Sigma . \frac{\text{ſ.}\, n\varphi}{n^{2m-1}}$, oder die Summe der dortigen Reihe mit **gleichen bejahten Zeichen**; durch einen Ausdruck, welcher nach den Potenzen von $\pi - \varphi$ fortgeht. Entwickelt man die letztern, ſo erhält jene Summe ($= S$) folgende Form:

$$S = \alpha\varphi + \beta\varphi^2 + \gamma\varphi^3 + \&c\ldots + \delta\varphi^{2m-3} + \varepsilon\varphi^{2m-2} + \zeta\varphi^{2m-1}.$$

Die Coefficienten α, β, γ u. ſ. w. könnte man durch die Entwicklung jener Potenzen beſtimmen: leichter iſt folgendes Verfahren: es iſt nemlich $\Sigma \pm \frac{\text{ſ.}\, n\varphi}{n^{2m-1}}$ $= \Sigma \frac{\text{ſ.}\, n\varphi}{n^{2m-1}} - \frac{1}{2^{2m-2}} . \Sigma \frac{\text{ſ.}\, 2n\varphi}{n^{2m-1}}$ (wovon man ſich durch eine leichte Betrachtung dieſer Reihen überzeugen wird). Verwandelt ſich alſo, ſtatt φ, 2φ, geſchrieben, die Reihe S in S^1, ſo muß $S - \frac{S^1}{2^{2m-2}}$ der Reihe in (1) gleich werden. So erhält man Gleichungen für die Coefficienten. Zuerſt überſieht man aus denſelben leicht, daß die Coefficienten der geraden Potenzen verſchwinden müſſen, weil dieſe auch in der nur erwähnten Reihe fehlen: eine Ausnahme macht der Coefficient der letzten Potenz ohne eins, für dieſen iſt nemlich

$\varepsilon\left(1-\frac{2^{2m-2}}{2^{2m-2}}\right)=0$, woraus man nicht auf $\varepsilon=0$ ſchließen darf. Es finden ſich aber ε und ζ unmittelbar, ſogleich aus der Entwickelung der letzten Glieder von $(\pi-\varphi)^{2m-1}$, und zwar $\varepsilon=\pm\frac{\pi}{1.2..2m-2}.\frac{1}{2}$; wo, wie in (1), das obere Zeichen für ein ungerades m gilt, das untere für ein gerades. Die übrigen Coefficienten geben ſich folgendergeſtalt: für α wird $\alpha\left(1-\frac{1}{2^{2m-3}}\right)$ $=\Sigma\pm\frac{1}{n^{2m-2}}$, alſo $\alpha=\Sigma\frac{1}{n^{2m-2}}$; eben ſo $\gamma=\frac{-1}{1.2.3}\Sigma\frac{1}{n^{2m-4}}$; u. ſ. w. Daraus entſteht folgende Summation:

$$\Sigma\frac{\text{ſ}.n\varphi}{n^{2m-1}}=\varphi\Sigma\frac{1}{n^{2m-2}}-\frac{\varphi^3}{1.2.3}.\Sigma\frac{1}{n^{2m-4}}+\&c...$$
$$\pm\frac{\varphi^{2m-2}}{1.2..2m-2}.\pi.\tfrac{1}{2}\mp\frac{\varphi^{2m-1}}{1.2..2m-1}.\tfrac{1}{2}$$

wobey das Geſetz des Fortgangs leicht zu überſehen iſt: die m erſten Glieder der Reihe, welche ſ. φ ausdrückt, ſind nemlich in $\Sigma\frac{1}{n^{2m-2}}$; $\Sigma\frac{1}{n^{2m-4}}$; $\Sigma\frac{1}{n^{2m-6}}\ldots\Sigma\frac{1}{n^2}$; $\frac{1}{2}$; multiplicirt: wozu noch, nach der ſchon bemerkten und erklärten Ausnahme, das letzte Glied ohne eins kommt; daher auch das letzte Glied ein anderes Zeichen hat, als ihm vermöge der nur erwähnten Reihe zukäme.

4) Man ſetze hier wie in (2) $\varphi=\pi$; dividire überall durch π^{2m-1}, mache aus den zwey letzten Glie-

dern eines, und ſchreibe dann, vor m, $m+1$, ſo entſteht folgende Gleichung:

$$0 = \pi^{-2m} \Sigma \frac{1}{n^{2m}} - \frac{\pi^{-2m+2}}{1.2.3} \Sigma \frac{1}{n^{2m-2}} + \&c. . .$$

$$\mp \frac{\pi^{-2}}{1 \ldots 2m-1} . \Sigma \frac{1}{n^2} \pm \frac{m}{1 \ldots 2m+1}.$$

Dieſe Gleichung drückt das allgemeine Geſetz aus, nach welchem die Summen der Reihen gerader Potenzen natürlicher Zahlen, mit **einerley Zeichen**, fortſchreiten *). Daraus iſt auch der Zuſammenhang dieſer Summen mit den bekannten **Bernoulliſchen Zahlen** erſichtlich: Wenn nemlich $\mathfrak{A}^{M}$ unter dieſen Zahlen der Ordnung nach die m^{te} bedeutet, ſo folgt, aus derſelben Geſetze, verbunden mit der nur erwieſenen Gleichung,

$$\Sigma \frac{1}{n^{2m}} = \frac{2^{2m-1}}{1.2.3 \ldots 2m} . \mathfrak{A}^{M} \pi^{2m} \text{ **)}.$$

Daraus wird auch für die Reihen in (2):

$$\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m}} = \frac{2^{2m-1}-1}{1 \ldots 2m} . \mathfrak{A}^{M} \pi^{2m}.$$

Zugleich ergiebt ſich als die Hälfte der Summe dieſer beiden Ausdrückungen: $\Sigma \frac{1}{(2n-1)^{2m}}$ (von $n = 1$ bis $n = \text{inf.}$) $= \frac{2^{2m}-1}{1 \ldots 2m} . \frac{\mathfrak{A}^{M} . \pi^{2m}}{2}$

*) Vergl. *Euleri* Opuſc analyt. Tom. II. l. c.

**) Aus dem Geſetze, nach welchem die Bernoulliſchen Zahlen, unmittelbar, am bequemſten berechnet werden (Inſtit. Calc. Differ. P. II. cap. V. p. 418), iſt dieſe Folge nicht wohl zu überſehen: wenn man aber zurückgeht, und die Gleichungen (p. 414) für die Zahlen β, δ, ζ u. ſ. w., aus welchen die

5) Die Unterſuchungen in (1) (3) betreffen die Reihen von Sinuſſen: da das Verfahren für die Coſinuſſe mit dem ſeither beobachteten völlig übereinkommt, ſo wäre eine ausführliche Entwickelung hier überflüßige Wiederholung. Ich ſetze alſo nur die Reſultate her, welche die allgemeinen Ausdrücke enthalten. Es iſt nemlich

$$\Sigma \pm \frac{\text{cos. } n\phi}{n^{2m}} = \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m}} - \frac{\phi^2}{1.2} \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-2}}$$

$$+ \frac{\phi^4}{1.2.3.4} \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-4}} - \ldots\ldots \pm \frac{\phi^{2m-2}}{1 \ldots\ldots 2m-2} \Sigma \pm \frac{1}{n^2}$$

$$\mp \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\phi^{2m}}{1 \ldots 2m}$$

wobey das Geſetz des Fortgangs leicht in die Augen fällt: das allgemeine Glied des Ausdrucks iſt

$\pm \frac{\phi^{2r}}{1 \ldots 2r} \cdot \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-2r}}$. — Eben ſo findet ſich

für die Reihe mit gleichen bejahten Zeichen:

$$\Sigma \frac{\text{cos. } n\phi}{n^{2m}} = \Sigma \frac{1}{n^{2m}} - \frac{\phi^2}{1.2} \Sigma \frac{1}{n^{2m-2}}$$

$$+ \frac{\phi^4}{1..4} \Sigma \frac{1}{n^{2m-4}} - \ldots\ldots$$

$$\mp \frac{\phi^{2m-1}}{1 \ldots 2m-1} \cdot \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\phi^{2m}}{1 \ldots 2m}$$

Die allgemeine Form der Glieder dieſes Ausdrucks iſt

Bernoulliſchen gebildet werden, betrachtet: ſo wird man ſich leicht davon überzeugen. Dieſe Anmerkung ſchien mir nothwendig, da Euler jene Folge ohne einige Erläuterung annimmt.

$\pm \frac{\varphi^{2r}}{1 \ldots 2r} \cdot \Sigma \frac{1}{n^{2m-2r}}$; die zween letzten ſind für ſich klar, und die Ausnahme bey dem letzten, ohne eins, iſt, wie in (3), zu erklären. Wegen der Zeichen gilt auch hier, die in (3) gemachte Erinnerung.

IV. Anmerkungen über den Fall: $\varphi = 0$.

1) Wenn man in der (III. 1.) erwieſenen Summation:

$$\text{ſ.}\ \varphi + \frac{\text{ſ.}\ 2\varphi}{2} + \frac{\text{ſ.}\ 3\varphi}{3} + \ldots \text{in inf.} = \frac{\pi - \varphi}{2}$$

$\varphi = 0$ ſetzt, ſo verſchwinden ſ. φ, ſ. 2φ, ſ. 3φ u. ſ. w. Und doch ſoll die Summe der Reihe $= \frac{\pi}{2}$ werden. Dieſes Paradoxon erklären Bernoulli und Euler (wenn ich ihre Sprache in meine Zeichen überſetze) folgendergeſtalt: für ein unendlich kleines φ werde ſ. $\varphi = \varphi$; ſ. $2\varphi = 2\varphi$ u. ſ. w: alſo $\Sigma \frac{\text{ſ.}\ n\varphi}{n} = \Sigma\varphi = n\varphi$; es ſey aber bekannt, daß eine unendlich kleine Größe unendlichmal wiederholt, oder in einen unendlich großen Factor (dergleichen hier n andeutet) multiplicirt, etwas endliches geben könne; und ſo enthalte die Folge aus jener Summation: $\frac{\pi}{2} = n\varphi$, keine Ungereimtheit. Dabey läßt ſich noch folgendes anmerken:

2) Für jeden Bogen x iſt ſ. $x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \ldots 5} -$ &c. für einen unendlich kleinen Werth von x

verſchwinden die höhern Potenzen, gegen die erſte: welches in einem, der Sache ſelbſt angemeſſenern Ausdrucke, ſo viel heißt: die **Grenze des Verhältniſſes** $\frac{l.\,x}{x}$ ſey $= 1$. So richtig das im allgemeinen iſt, ſo glaube ich doch, daß im gegenwärtigen Falle nicht verſtattet ſey, die höhern Potenzen wegzulaſſen. Man behalte ſie vorerſt bey, ſo wird $\Sigma \frac{1}{n}\, l.\, n\,\varphi =$

$$\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1 \ldots 5} - \&c.$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(2\,\varphi - \frac{2^3\,\varphi^3}{1.2.3} + \frac{2^5\,\varphi^5}{1 \ldots 5} - \&c.\right)$$

$$+ \tfrac{1}{3}\left(3\,\varphi - \frac{3^3\,\varphi^3}{1.2.3} + \&c.\right)$$

Ordnet man nach den Potenzen von φ, ſo werden die Coefficienten-Reihen, welche zu φ; $-\frac{\varphi^3}{1.2.3}$; u. ſ. w. gehören, $= \Sigma\, n^0$; $\Sigma\, n^2$; $\Sigma\, n^4$; u. ſ. w. Nun iſt (für ein unendlichgroßes n, wie hier angenommen wird,) $\Sigma\, n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}$. Alſo erhält man: $\Sigma \frac{1}{n}\, l.\, n\,\varphi$ $= n\,\varphi - \frac{1}{3}\frac{n^3\,\varphi^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\frac{n^5\,\varphi^5}{1 \ldots 5} - \&c.$ Für ein unendlichkleines φ kann $n\,\varphi$ endlich werden, wie auch **Euler** annimmt; aber zugleich werden dann auch $n^3\,\varphi^3$, $n^5\,\varphi^5$ u. ſ. w. endliche Größen, und es iſt demnach nicht

erlaubt, $\Sigma \frac{1}{n}$ ſ. $n\varphi$ geradezu $= n\varphi$ zu ſetzen. —— Dieſes Beyſpiel dient unter andern auch, zu zeigen, wie vorſichtig man bey dem Gebrauche des Unendlichen im Calcul verfahren müſſe. Die Sache im allgemeinen betrachtet, ſcheint freylich die Evidenz der höhern Analyſis dadurch zu gewinnen, wenn jener Begrif ganz daraus verbannt würde. Vielleicht ließen ſich, auch bey dieſer Veränderung, die Anfangsgründe der Wiſſenſchaft noch bequem vortragen: es giebt aber ſchwehrere analytiſche Unterſuchungen, bey welchen die Vermeidung des Begrifs, und der ſeither üblichen Bezeichnungsart deſſelben, nicht nur einen viel weitläufigern, mit ungleich größerer Mühe zu überſehenden Vortrag, ſondern ganz andere Verfahrungsarten und Wendungen der Beweiſe erfordern würde.

3) Aehnliche Betrachtungen wie in (2) kann man auch bey Reihen mit höhern Exponenten anſtellen. **Euler** ſagt: $\Sigma \frac{\text{ſ.}\, n\varphi}{n^2}$ verſchwinde offenbar für $\varphi = o$: denn wenn man vor φ die unendlich kleine Größe ω ſetze, ſo werde jene Reihe $= \frac{\omega}{1^2} + \frac{\omega}{2^2} + \frac{\omega}{3^2} +$ &c. $= \omega \frac{\pi^2}{6} = o$. Dieſes gründet ſich wiederum darauf, daß die höhern Potenzen von φ weggelaſſen ſind. Was nur dargethan worden, muß wenigſtens darin behutſam machen. Man behalte alſo alle Potenzen bey, ſo wird $\Sigma \frac{\text{ſ.}\, n\varphi}{n^3} =$

$$\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1..5}$$

$$+\frac{1}{2^3}\left(2\varphi - \frac{2^3\,\varphi^3}{1.2.3} + \&c.\right)$$

$$+ \&c.$$

$$= \varphi\,\Sigma\,\frac{1}{n^2} - \frac{\varphi^3}{1.2.3}.\Sigma n^0 + \frac{\varphi^5}{1..5}.\Sigma n^2 - \&c.$$

Nun iſt zwar offenbar die erſte Reihe endlich, alſo mit φ multiplicirt gibt ſie o; aber die folgenden Reihen, welche **Euler** gar nicht in Rechnung genommen hat, ſind für ſich unendlich groß, und ſie könnten alſo wohl, mit unendlich kleinen Größen multiplicirt, etwas endliches geben. Wenigſtens läßt ſich das Gegentheil nicht ohne einige Rechtfertigung oder Erläuterung annehmen. — Eben dieſe Erinnerungen gelten auch gegen die Art zu ſchließen, welche bey den fernern Summationen gebraucht wird.

V. Fortſetzung.

1) Unter den Reihen von Coſinuſſen iſt folgende Summation die einfachſte: Σ coſ. $n\varphi = -\frac{1}{2}$. Setzt man nun $\varphi = o$; ſo folgt daraus die Ungereimtheit: $1 + 1 + 1 + 1$ &c. in inf. $= \frac{1}{2}$. **Dan. Bernoulli** erklärt dieſes **Paradoxon** ſo: die erwähnte Summation ſey für jeden Bogen φ wahr, auch wenn er noch ſo klein ſey, ſo lange nur nicht φ ein abſolutes Nichts ſey. Er ſagt zuletzt *): „Ergo in arcu φ non excluduntur arculi;

*) Tom. XVI. Comm. Acad. Petrop. p. 84.

arculi; excluduntur ſaltem puncta vera mathematica, *quorum exiſtantiam & poſitionem Analyſis abſtracta indicare nequit.*„ Jch muß geſtehen, daß mich dieſe Erklärung nicht völlig befriedigt: ſonſt geben doch die Reihen für den Sinus, Coſinus, die Tangenten u. ſ. w. auch die die wahren Werthe für verſchwindende Bogen; auch gebraucht B. ſelbſt den Fall $\varphi = 0$, zur Beſtimmung des Werths der **Conſtanten**. Jener Ausſpruch ſcheint alſo der Analyſis eine Unvollkommenheit zur Laſt zu legen, von welcher ſie, wenigſtens ſonſt, frey iſt.

3) Ließe ſich deutlich zeigen, daß in der Rechnung ſelbſt Gründe liegen, warum ſie gerade bey dem gegenwärtigen Falle anders geführt werden muß, als ſonſt: ſo wäre jenes Paradoxon mit der Analyſis in Uebereinſtimmung gebracht, und man hätte nicht nöthig zu ſagen: die Analyſis ſey auf dieſen Fall gar nicht anwendbar. — Vielleicht leiſtet dieſen Vortheil nachfolgende Erklärung: Jch lege dabey die allgemeinſte Methode, Reihen von Coſinuſſen und Sinuſſen zu ſummiren, welche auch **Euler** in andern Fällen gebraucht hat, zum Grunde. Man ſetzt $\text{coſ.}\, n\varphi = \frac{p^n + q^n}{2}$, wo $p = \text{coſ.}\, \varphi + \sqrt{-1}\,.\,\text{ſ.}\,\varphi$, $q = \text{coſ.}\, \varphi - \sqrt{-1}\,.\,\text{ſ.}\,\varphi$. So wird alſo $\Sigma\, \text{coſ.}\, n\varphi$ $= \frac{1}{2}\Sigma p^n + \frac{1}{2}\Sigma q^n = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q}\right)$. Für $\varphi = 0$ iſt $p = 1$, und $q = 1$; alſo gibt wirklich die Rechnung: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{0} + \frac{1}{0}\right)$, oder einen unendlich großen Werth der Summe. Um nun zu erweiſen, daß die Art, wie die Rechnung im allgemeinen richtig geführt wird, und das Reſultat $-\frac{1}{2}$ gibt, bey $\varphi = 0$ nicht ange-

bracht werden darf, dienet zuerſt die Bemerkung, daß $q = p^{-1}$ iſt. So wird $\Sigma\,\text{coſ.}\,n\phi = \frac{1}{2}(\Sigma p^n + \Sigma p^{-n})$. Für ein willkürliches p, iſt $\Sigma p^n = \frac{p}{1-p}$; $\Sigma p^{-n} = \frac{1}{p-1} = -\frac{1}{1-p}$: alſo $\Sigma\,\text{coſ.}\,n\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = -\frac{1}{2}$. Bey dieſer Reduction liegt die Annahme: $\frac{1}{p-1} = -\frac{1}{1-p}$ zum Grunde: für $p = 1$ iſt $1 - p = p - 1$. (Dieſe Gleichung hat offenbar zur Wurzel: $p = 1$.) Alſo wird $\Sigma p^{-n} = +\frac{1}{1-p}$, und $\Sigma\,\text{coſ.}\,n\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{1-p}\right) = \infty$. Jene Annahme ſetzt voraus, daß $1 - p$ und $p - 1$ verſchieden ſeyen, welches für $p = 1$ nicht ſtatt findet: auch würde ſonſt die Ungereimtheit daraus folgen: $\frac{1}{0} = -\frac{1}{0}$, oder $\frac{2}{0} = 0$.

4) Vielleicht könnten bey dieſer Vorſtellungsart noch Zweifel übrig bleiben: ſie verſchwinden aber völlig, wenn man die erſten Gründe jener Summationen zu Hülfe nimmt, wobey man auf die **Ergänzungen** achten muß *). So iſt für eine jede endliche Zahl von Gliedern,

$$\text{S.}\, x^n \text{ **)} = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x};\ \text{S.}\, x^{-n} = \frac{x^{-1} - x^{-n-1}}{1 - x^{-1}};$$

*) Käſtners Analyſis endlicher Größen, §. 15.

**) Vergl. §. II. not. g. Um den Unterſchied bemerkbar zu machen, bezeichne ich durch S. die Summe einer endlichen Reihe, vom erſten bis zu einem jedweden n^{ten} Gliede. Da Σ immer die Summe einer unendlichen Reihe andeutet: ſo ſcheint mir alle Zweideutigkeit gehoben zu ſeyn.

daraus entſteht die Summe der beiden endlichen Reihen $= \frac{x - x^{n+1} + x^{-n} - 1.}{1 - x}$ Für $x = 1$ verſchwinden Zähler und Nenner: man ſetze alſo $x = 1 + \omega$, und behalte nur die erſten Potenzen von ω bey, ſo fällt dieſe verſchwindende Größe durch Diviſion ganz weg: und man findet jene Summe $= 2n$; alſo unendlich groß für unendliche Reihen, wie ſich gehört.

5) Es finden ſich in der Analyſis, zumal in der Lehre von den Reihen, nicht ſelten Schwürigkeiten, welche auf eine ähnliche Weiſe können gehoben werden. Von allen wag' ich es nicht zu behaupten; aber bey vielen ſcheint mir die Entſtehungsart, welche zugleich die Methode ihrer Auflöſung angiebt, dieſe zu ſeyn. Man erweiſt einen allgemeinen Satz, aus Gründen, welche ihm einen gewiſſen Sinn, oder eine beſondere Einſchränkung geben. Durch eine Reihe von Schlüſſen, deren Anfang oft am Ende ſchwer zu überſehen iſt, geräth man endlich auf eine ungereimte Folgerung. Man hat nemlich fortgerechnet, ohne bey der Verbindung der Zeichen an die Begriffe zu denken, welche bey allen Anwendungen jenes erſten Satzes zum Grunde liegen müſſen. — So geht es, wenn mir eine Vergleichung zwiſchen ſonſt heterogenen Dingen erlaubt iſt, bey ſchiefen Anwendungen mancher Geſetze, bey welchen man die erſte Veranlaſſung, und damit den, nicht ſelten daraus abzuziehenden, Geiſt derſelben überſieht oder vergeſſen hat. Darin kommt die Analyſis überhaupt mit allen Verrichtungen überein, welche man, mehr oder weniger, auf einen gewiſſen Mechanismus gebracht hat: wobey immer Fälle vorkommen werden, da der Buchſtabe von dem Geiſte unterſchieden

werden muß. In der Mathematik ſind dieſer Fälle vielleicht am wenigſten: weil der Mechanismus ſelbſt hier von höherer Art iſt, und die künſtliche Maſchine des Calculs nie etwas beträchtliches wirken kann, wenn ſie nicht mit Geiſteskraft gelenkt wird.

VI. Summirung der Reihen in (III.), mit Potenzen von Coſinuſſen und Sinuſſen.

1) Einfachere Summationen, als die in (III.), hat man dadurch allgemeiner zu machen geſucht, daß man ſtatt der Sinuſſe und Coſinuſſe, auch höhere Potenzen derſelben in Betrachtung gezogen hat. Es läßt ſich nemlich jedwede r^{te} Potenz von coſ. φ in nachſtehenden Ausdruck auflöſen *):

$$2^r . \operatorname{coſ.} \varphi^r = \operatorname{coſ.} r\,\varphi + r \operatorname{coſ.} (r-2)\,\varphi$$
$$+ r\,\frac{(r-1)}{1\,.\,2} \operatorname{coſ.} (r-4)\,\varphi$$
$$+ r\,\frac{(r-1)}{1\,.\,2\,.\,3}\,(r-2) \operatorname{coſ.} (r-6)\,\varphi$$
$$+ \&c. \ldots .$$

Setzt man vor φ, $\frac{\pi}{2} - \varphi$; ſo wird aus coſ. φ, ſ. φ;

*) *Euler.* Subſidium Calculi ſinuum; Comment. Petrop. nov. T. V. In dieſem Ausdrucke, welcher mit dem $r+1^{ten}$ Gliede abbricht, kommt man, nach der Mitte, auf Coſinuſſe negativer Bögen, welche mit den Coſinuſſen der gleichen bejahten Bögen einerley ſind. Dieſe Betrachtung bietet eine Abkürzung dar, welche zur wirklichen Entwickelung der Potenzen bequemer, aber zu gegenwärtiger Unterſuchung weniger dienlich iſt.

und man erhält einen ähnlichen Ausdruck für Potenzen von Sinuſſen, entweder durch Coſinuſſe oder durch Sinuſſe, jenachdem r gerade oder ungerade iſt. Daraus überſieht man im allgemeinen, wie, durch Auflöſung höherer Potenzen in einfache, Reihen, in welchen jene vorkommen, auf den Fall $r = 1$ gebracht werden können. Auf die reciproke Reihen, deren Summen in (III.) angegeben ſind, iſt, ſo viel ich weiß, dieſes Verfahren noch nicht angewandt worden. Die Reduction ſetzt hier noch andere Summationen voraus, und leitet, ohngeachtet der anſcheinenden, zum Theil auch wirklichen, Verwicklung, doch zu einigen Sätzen, welche wegen ihrer Einfachheit und Allgemeinheit, eine Erwähnung verdienen.

2) Was zuerſt Reihen mit Potenzen von Sinuſſen, und zwar mit abwechſelnden Zeichen, betrift: ſo erhellt aus der in (1) gemachten Bemerkung, daß $\Sigma \pm \frac{\text{ſ.}\, n\varphi^r}{n^m}$ dann immer, aber auch nur alsdann, angegeben werden könne, wenn r und m zugleich entweder gerade oder ungerade Zahlen ſind. Für beide Fälle laſſen ſich folgende zween Sätze erweitern: 1) $\Sigma \pm \frac{\text{ſ.}\, n\varphi^r}{n^m}$ ſeye $= 0$, ſo lange $m < r$; *) 2) für $m = r$, werde $\Sigma \pm \frac{\text{ſ.}\, n\varphi^m}{n^m}$

*) Dieſe Summation giebt etwas ungereimtes für $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Die Erklärung beruhet auf den Gründen, aus welchen ſie abgeleitet iſt, die im folgenden §. weiter entwickelt werden. Die Summationen, welche dabey gebraucht werden, gelten nemlich nur für Bögen, die nicht größer als π ſind. Nun kommt in der Entwicklung von $\text{ſ.}\, \varphi^r$ nach (1) der Bogen $r\varphi$ vor, alſo

$= \pm \frac{1}{2} \varphi^m$, wobey das untere Zeichen gilt, wenn im einen Falle, m; im andern, $m + 1$, durch 4 theilbar iſt: ſonſt gilt das obere Zeichen.

3) Für Reihen mit Potenzen von Coſinuſſen, auch mit abwechſelnden Zeichen, ergeben ſich folgende Summationen:

$$\Sigma \pm \frac{\operatorname{coſ.} n \varphi^r}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - r \,.\, \frac{\varphi^2}{4}$$

$$\Sigma \pm \frac{\operatorname{coſ.} n \varphi^r}{n^4} = \alpha \pi^4 - r \beta \varphi^2 + r(3r-2) \gamma \varphi^4$$

wo α, β, γ aus dem Falle $r = 1$ in (III. 5.) bekannt ſind. Eben ſo erhält man Ausdrücke für $\Sigma \pm \frac{\operatorname{coſ.} n \varphi^r}{n^6}$; $\Sigma \pm \frac{\operatorname{coſ.} n \varphi^r}{n^8}$ u. ſ. w. Das Geſetz ihres Fortgangs allgemein zu überſehen, und zu zeigen, wie die, hier, und in (2) behaupteten Sätze gefunden worden ſind; dazu dienen nachfolgende Betrachtungen:

4) Wenn man in $\Sigma \pm \frac{\operatorname{coſ.} n \varphi^r}{n^{2m}}$, die r^{te} Potenz von $\operatorname{coſ.} n \varphi$ durch das in (1) angegebene Verfahren entwickelt, ſo verwandelt ſich jene Reihe in $r + 1$ Partial-Reihen von der Form: $\Sigma \pm \frac{\operatorname{coſ.} n \psi}{n^{2m}}$, wo ψ nach

darf φ nicht größer als $\frac{\pi}{r}$ genommen werden. — Auf dergleichen Bemerkungen, welche Rechenſchaft geben von der Einſchränkung gewiſſer allgemeiner Sätze, iſt man, wie es mir vorkommt, in der Lehre von den Reihen nicht immer gehörig aufmerkſam geweſen. Wirklich ſcheint darin noch nicht alles überzeugend und deutlich genug auseinandergeſetzt zu ſeyn.

einander folgende Werthe erhält: $r\varphi$; $(r-2)\varphi$; $(r-4)\varphi$; u. ſ. w. Dieſe Partial-Reihen ſind noch, nach der Ordnung, in folgende Größen multiplicirt: $1; \frac{r}{1}; r\frac{(r-1)}{1.2}$; u. ſ. w. welche bekanntlich die Binomial-Coefficienten der r^{ten} Potenz vorſtellen. Nun läßt ſich $\Sigma \pm \frac{\operatorname{coſ.} n\psi}{n^{2m}}$, nach (III. 5.), durch gerade Potenzen des Bogens ψ, von der 0ten an bis zur $2m^{\text{ten}}$ ausdrücken. Nimmt man alſo die Summen der erwähnten Reihen, auf dieſe Weiſe dargeſtellt, zuſammen: und ordnet ſolche nach den Potenzen von φ, ſo wird der Coefficient einer jedweden $2p^{\text{ten}}$ Potenz

$$= \pm \alpha \left(r^{2p} + r(r-2)^{2p} + r\frac{(r-1)}{1.2}(r-4)^{2p} + \&c. \right);$$

wo α aus (III. 5.) bekannt iſt. Es kommt demnach nur darauf an, die Summe der endlichen Reihen zu beſtimmen, welche in $\pm\alpha$ multiplicirt iſt.

VII. Fortſetzung, nebſt vorläufiger Unterſuchung einer andern Reihe.

1) Dieſe Reihe, deren Summirung bey der im vorhergehenden §. angefangenen Unterſuchung eine Zwiſchenfrage ausmacht, iſt, als ein beſonderer Fall, unter folgender allgemeineren Reihe begriffen:

$$r^q y^r + r(r-2)^q y^{r-2} + r\frac{(r-1)}{1.2}(r-4)^q y^{r-4} + \&c. \ldots = Y$$

Da die Summation der letztern Reihe auch bey andern

analytiſchen Unterſuchungen von Nutzen ſeyn kann, ſo wird die Entwicklung derſelben, bey gegenwärtiger Veranlaſſung nicht überflüßig ſeyn. Auch kenne ich kein einfacheres Verfahren, jene Zwiſchenfrage aufzulöſen, als eben die Summirung der erwähnten allgemeineren Reihe, in welcher man hernach nur $y = 1$ ſetzen darf.

Für jedes y iſt nach dem Binomiſchen Satze:

$$y^r + ry^{r-2} + r\frac{(r-1)}{1.2}y^{r-4} + \ldots + y^{r-2r} = \left(y + \frac{1}{y}\right)^r$$

Wenn man dieſe Reihe differentiirt, und alsdann durch y multiplicirt, ſo entſteht daraus folgende Reihe:

$$ry^r + \frac{r}{1}.(r-2)y^{r-2} + \ldots + (r-2r).y^{r-2r}$$

deren Summe alſo $= r\left(y + \frac{1}{y}\right)^{r-1}\left(y - \frac{1}{y}\right)$ iſt. Dieſes Verfahren kann man fortſetzen; und ſo erhellt, um die Sache ſogleich allgemein vorzutragen, daß eine q-fache Wiederholung der Differentiation, und immer darauf folgenden Multiplicetion, durch y, die Summe der anfangs erwähnten Reihe $= Y$, für jedes q beſtimme.

2) Die Rechnungen, welche in dieſer Abſicht geführt werden müſſen, vollſtändig zu entwickeln, wäre hier zu weitläufig. Es wird hinlänglich ſeyn, das Reſultat ſo darzuſtellen, daß man daraus das allgemeine Geſetz am bequemſten überſehen kann. Man nenne, der Kürze wegen, $\frac{y - \frac{1}{y}}{y + \frac{1}{y}} = z$; ſo wird Y immer für jedes q, einem

Ausdrucke gleich ſeyn, deſſen Glieder zum gemeinſchaftlichen Factor $\left(y+\frac{1}{y}\right)^r$ haben, und ſonſt nach Potenzen von z mit folgenden Exponenten fortgehen: q; $q-2$; $q-4$; u. ſ. w.; für ein ungerades q iſt alſo der Exponent von z im letzten Gliede $=1$, für ein gerades q kommt in dieſem Gliede z gar nicht vor (weil $z^0=1$). So wird für jedes q; $Y\left(y+\frac{1}{y}\right)^{-r}$ folgende Geſtalt haben: $A z^q + B z^{q-2} + C z^{q-4} + \ldots\ldots$ wobey es nur darauf ankommt, die Coefficienten A, B, C u. ſ. w. gehörig zu beſtimmen.

3) Zu dieſer Abſicht ſcheint mir folgende Bezeichnungsart am dienlichſten zu ſeyn. Die Coefficienten des erſten, zweyten, dritten Glieds u. ſ. w. für jedes q, benenne ich mit den Römiſchen Zahlzeichen I, II, III, u. ſ. w. nach der Ordnung; jedes dieſer Zahlzeichen wird oben mit einem Index *) verſehen, der dem Exponenten der Potenz

*) Es kommen in der Analyſis nicht ſelten Fälle vor, wo es bequem iſt, eine Reihe verſchiedener Größen, die eine gewiſſe gemeinſchaftliche Beziehung haben, auf einerley Weiſe zu bezeichnen, z. B. durch einen Buchſtaben des Alphabeths. Den Unterſchied drückt man alsdann durch den an die Spize geſchriebenen Index aus, welcher die Ordnung einer jeden Größe in der Reihe der gleichnamichten anzeigt. Damit dieſer Index nicht mit einem Exponenten verwirrt werde, beobachte ich ſonſt, (z. B. in III. 8.) die Vorſchrift, denſelben mit Römiſchen Zahlen oder großen Buchſtaben zu bezeichnen, da Exponenten gewöhnlich mit arabiſchen Zahlzeichen und kleinen Buchſtaben ausgedruckt werden. Hier bin ich davon abgewichen, weil ich die Zahlen und Buchſtaben der erſten Art zu anderer Abſicht gebrauchen mußte: deswegen habe ich die von der andern Art gewählt, und ſolche mit: | | eingeſchloſſen, um die Verſchiedenheit von Exponenten bemerkbar zu machen.

von z entſpricht, und andeutet, das wievielte daſſelbe in der Reihe der gleichnamichten Zahlzeichen ſeye. Bey ungeraden q iſt alſo der letzte Coefficient $= Q^{|1|}$; (welcher Buchſtabe die q^{te} Römiſche Zahl ausdrückt,) bey dem nächſtfolgenden geraden $q + 1$ ſollte er, der Vorſchrift gemäß, $= (Q + I)^{|0|}$ ſeyn: ſtatt deſſen wird $Q^{|1|}$ geſchrieben. Begreiflich kann der Index nie $= 0$ werden, und wenn er es zu werden ſcheint, ſo nimmt man das nächſt vorhergehende Zahlzeichen mit dem Index $= 1$. So ſtimmt jene Ausnahme mit der Bezeichnungsart überein. — Demnach kommen in dem Ausdrucke (2) von $Y\left(y + \frac{1}{y}\right)^{-r}$, für $q = 2l - 1$ und $= 2l$, l Römiſche Zahlzeichen nach der Ordnung vor; ihre Indices ſind im erſten Falle: $2l - 1$; $2l - 3$; ....3; 1; im andern: $2l$; $2l - 2$; ....4; 2; 1; wobey die nur erwähnte anſcheinende Irregularität bey dem letzten Index wohl zu bemerken iſt. Auf dieſe Weiſe verwandelt ſich die allgemeine Form des Ausdrucks (2) in folgende:

$$I^{|q|}.z^{q} + II^{|q-2|}.z^{q-2} + III^{|q-4|}.z^{q-4} + \ldots\ldots$$

4) Dieſes vorausgeſchickt, wird das Verhältniß zwiſchen denen auf die erwähnte Art bezeichneten Größen, durch folgende Gleichung ausgedrückt;

$$M^{|n|} = (n+1).(M-I)^{|n+1|} + (r-n+1).M^{|n-1|}$$

wo $M^{|n|}$; $M^{|n-1|}$, unter den Größen, welche mit dem m^{ten} Römiſchen Zahlzeichen bemerkt ſind, der Ordnung nach, die n^{te} und $n - 1^{te}$ bedeuten; $(M-I)^{|n+1|}$ die $n + 1^{te}$ unter denen, welche durch das nächſtvorher=

gehende Zahlzeichen angedeutet werden:*) n und m kann man hier willkürlich annehmen. Für $m = 1$, wird, da es kein $M - I$ gibt, $I^{|n|} = (r - n + 1) I^{|n-1|}$. Für $n = 1$, iſt nach der in (3) gemachten Bemerkung $M^{|0|} = (M - I)^{|1|}$, alſo $M^1 = 2(M - I^{|2|} + r.(M - I)^{|1|}$. Aus dieſen Gleichungen laſſen ſich allgemeine Ausdrücke ableiten. Man ſetze, der Kürze und leichtern Ueberſicht wegen, $(n+1)(r-n) = \varphi n$; bekanntlich druckt man auch ſonſt durch φn eine jedwede Funktion von n aus, alſo erhellet, was im gegenwärtigen Falle $\varphi(n+1)$, $\varphi(n+2)$ u. ſ. w. bedeuten. Ferner ſtelle immer das Zeichen S das ſummatoriſche Glied des ganzen nach demſelbigen geſchriebenen Ausdrucks vor, oder die Summe aller Werthe dieſes Ausdrucks, von einem gewiſſen, ſogleich näher zu beſtimmenden, n an gerechnet. Dieſes vorausgeſetzt, ergeben ſich folgende Beſtimmungen:

$$\frac{I^{|n|}}{r(r-1)\ldots(r-n+1)} = 1$$

$$\frac{II^{|n|}}{r(r-1)\ldots(r-n+1)} = S\varphi n$$

$$\frac{III^{|n|}}{r(r-1)\ldots(r-n+1)} = S\varphi n . S\varphi(n+1)$$

$$\frac{IV^{|n|}}{r(r-1)\ldots(r-n+1)} = S\varphi n . S\varphi(n+1) . S\varphi(n+2)$$

*) Man kann ſich die mit einem Zahlzeichen ausgedrückte Gröſſen in Vertikalreihen vorſtellen; die mit I in der erſten, mit II, III, u. ſ. w. in der zweyten, dritten u. ſ. w. So finden ſich immer gleiche Indices in einer horizontalen Reihe. Dem-

Wie dieſe Ausdrücke fortgehen werden, iſt leicht zu überſehen. Es wird nemlich allgemein:

$$\frac{M^{|n|}}{r(r-1)..(r-n+1)} = S\varphi n S\varphi(n+1)... S\varphi(n+m-2)$$

Wegen dem Anfangswerthe von n, von welchem jede Summe beſonders gerechnet wird, iſt dieſes zu merken: wenn nach einem S, zunächſt $\varphi\ (n+\delta)$ kommt, ſo wird die durch dieſes S bezeichnete Summe von $n = -\delta$ an genommen *).

Jene Ausdrücke zeigen unmittelbar, daß kein Zahlzeichen einen größern Index als r erhalten kann. Wird alſo in der allgemeinen Form (3), $q = r + 1$, ſo fällt das erſte Glied, welches ſonſt immer I mit einem gewiſſen Index enthält, weg: eben ſo fehlen in jenem Ausdrucke für $q = r + 3$, noch das zweyte; für $q = r + 5$, das dritte Glied u. ſ. w. Die übrig bleibenden Glieder folgen den angegebenen allgemeinen Regeln. — Noch erhellt aus dem Ausdrucke für $M^{|n|}$, daß die allgemeine Beſtimmung dieſer Größe von der Summation der Potenzen der natürlichen Zahlen abhange.

5) Wenn man die ſeitherigen allgemeinen Betrachtungen auf den Fall $y =$ anwendet, wie (1) erfordert, ſo wird in (3) $z = 0$; alſo ergeben ſich folgende zween Sätze: die Summe der Reihe:

nach wird $M^{|n|}$ das n^{te} Glied in der m^{ten} Vertikalreihe, oder es findet ſich in dieſer ihrem Durchſchnitte mit der n^{ten} Horizontalreihe.

*) Wenn N eine beliebige Function von n iſt, und man ſucht ihr ſummatoriſches Glied von $n = -d$ an gerechnet, ſo darf man nur in N, $n = p - d - 1$ ſetzen, woraus P entſpringe. Nun nimmt man SP von $p = 1$, bis zu $p = n + d + 1$, ſo iſt, was herauskommt, $= SN$ in dem erwähnten Sinne.

$$r^q + r\,(r-2)^q + r\frac{(r-1)}{1\,.\,2}\,(r-4)^q + \ldots\ldots$$

iſt $= 0$, für ungerade q; für gerade q iſt eben dieſe Summe $= Q^I$: welche Größe gefunden wird, wenn man in dem allgemeinen Ausdrucke (4) $n = 1$, und $m = q$ ſetzt. Unmittelbare Folgen dieſes Satzes ſind die in (VI. 3.) behaupteten Summationen. Zugleich iſt daraus das allgemeine Geſetz ihres weitern Fortgangs erſichtlich.

6) Alles was von (1) bis (4) iſt geſagt worden, gilt auch, wenn in der ſeither unterſuchten Reihe die Zeichen abwechſeln: nur muß vor $+\frac{1}{y}$, $-\frac{1}{y}$ geſchrieben werden. Iſt alſo jetzt $z = \frac{y+\frac{1}{y}}{y-\frac{1}{y}}$, und drückt Y die Summe nachfolgender Reihe aus:

$$r^q\,y^r - r\,.\,(r-2)^q\,.\,y^{r-2} + r\frac{(r-1)}{1\,.\,2}\,(r-4)^q\,y^{r-4} - \&c.\ldots$$

ſo wird, wie in (3), $Y\left(y-\frac{1}{y}\right)^{-r} =$

$$I|q|\,.\,z^q + II|q-2|\,.\,z^{q-2} + III|q-4|\,.\,z^{q-4} + \&c.\ldots$$

Die Coefficienten ſind mit denen im vorhergehenden beſtimmten einerley. In der Anwendung auf den Fall $y = 1$, fließen aus dieſem allgemeinen Ausdrucke folgende Sätze: Für jedes q, was kleiner als r iſt, wird, ohne Einſchränkung, $Y = 0$. Iſt $q = r$, ſo wird die Summe: $= 2^r\,.\,I|r| = 2^r\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots r$ (nach 4). Iſt q

größer als r, ſo müſſen zween Fälle unterſchieden werden: wenn der Unterſchied $q - r$ einer geraden Zahl gleicht, ſo verſchwindet die Summe Y, wie für $q < r$: iſt aber $q - r$ eine gerade Zahl $= 2l - 2$, ſo wird $Y = 2^r . L|r|$, wo $L|r|$ aus (4) beſtimmt werden kann.

7) Um die Anwendung dieſer Sätze auf die in (VI. 3.) angeführte Summationen deutlicher zu machen, wird es dienlich ſeyn, die r^{te} Potenz von ſ. φ hier entwickelt darzuſtellen. Wenn nemlich in dem (VI. 1.) angegebenen Ausdrucke, für φ, $\frac{\pi}{2} - \varphi$ geſchrieben wird, ſo fließen daraus nachſtehende Folgerungen:

$$\pm 2^r \text{ſ.} \varphi^r = \text{ſ.} r\varphi - \frac{r}{1} . \text{ſ.} (r-2)\varphi + r\frac{(r-1)}{1.2} \text{ſ.} (r-4)\varphi - \&c.$$

$$\pm 2^r \text{ſ.} \varphi^r = \text{coſ.} r\varphi - \frac{r}{1} . \text{coſ.} (r-2)\varphi + r\frac{(r-1)}{1.2} \text{coſ.} (r-4)\varphi - \&c.$$

Der erſte Ausdruck gilt für ein ungerades, der andere für ein gerades r: das obere Zeichen gilt, wenn in dieſem Falle r, in jenem $r - 1$ durch 4 theilbar iſt: ſonſt gilt das untere Zeichen. Nun laſſen ſich bey dieſen Ausdrükkungen ähnliche Schlüſſe anbringen, dergleichen in (VI. 4.) ſind geführt worden: und ſo fließen die erwähnten Summationen, als unmittelbare Folgen, aus den Sätzen in

(6). Zugleich erhellt wie $\Sigma \pm \frac{\text{ſin.}\, n\, \varphi^r}{n^m}$ gefunden wer- den könne, wenn m gröſser als r iſt.

VIII. Unterſuchung der Reihe, welche Potenzen von Coſinuſſen und Sinuſſen vielfacher Bögen ausmachen.

1) Die Bemerkung, daſs Sinuſſe und Coſinuſſe vielfacher, oder überhaupt arithmetiſch fortſchreitender Bögen, ſich in einer recurrirenden Reihe der zwoten Ordnung befinden, iſt bey der Erfindung ihrer Summen von einigen Schriftſtellern benutzt worden. Ob etwa höhere Potenzen jener Gröſsen ähnliche Reihen bilden, hat man, ſoviel ich weis, nicht unterſucht: ſondern bey Summationen von der Art, zu welcher die in (VI.) und (VII.) entwickelte gehören, ohne eine ſolche Rückſicht, das dort erklärte Verfahren gebraucht. Es wird wenigſtens zur Erläute-

*) Die ſeitherige Ausführung gilt unmittelbar nur von Reihen, in welchen die Zeichen abwechſeln. Warum das gegenwärtige Verfahren nicht ohne Einſchränkung auch auf Reihen mit gleichen Zeichen angewandt werden könne, davon ligt der Grund darin: in den Ausdrückungen für Potenzen von Coſinuſſen und Sinuſſen, wie ſie hier gebraucht worden ſind, kommt man auf negative Bögen. Nun gelten die in (III. 3. und 5.) erwieſene Summationen: $\Sigma \frac{\text{ſ.}\, n\, \varphi}{n^{2m-1}}$ und $\Sigma \frac{\text{coſ.}\, n\, \varphi}{n^{2m}}$ nicht für negative φ, weil das letzte Glied, ohne eins, dort eine gerade, hier eine ungerade Potenz von φ enthält: worin daſſelbe von allen übrigen Gliedern eine unterſcheidende Ausnahme macht: auf dieſe laſſen ſich die ſeitherigen Betrachtungen unmittelbar anwenden: bey jenem muſs die, ſchon in (VI. 1.) (Anmerk.) erwähnte, Abkürzung zu Hülfe genommen werden.

rung des Zuſammenhangs unter dieſen Wahrheiten etwas beytragen, jene Bemerkung dahin zu erweitern, daß Potenzen jedweden m^{ten} Grades von Sinuſſen und Coſinuſſen vielfacher Bögen, ſich in einer recurrirenden Reihe von der Ordnung $m+1$ befinden.

2) Dieſe Behauptung iſt ein beſonderer Fall von nachfolgendem allgemeineren Satze: wenn nemlich

$$a^I + a^{II}x + a^{III}x^2 + a^{IV}x^3 + \ldots\ldots = S$$

eine recurrirende Reihe der 2ten Ordnung iſt, ſo wird die Reihe:

$$A^I + A^{II}x + A^{III}x^2 + A^{IV}x^3 + \ldots = \mathfrak{S}$$

zu den recurrirenden Reihen von der Ordnung $m+1$ gehören, wenn A^I, A^{II} u. ſ. w. die m^{te} Potenzen der entſprechenden Coefficienten jener erſten Progreſſion ſind. Dieſes zu erweiſen, ſey $x^2 + \alpha x + \beta = 0$, die Gleichung, welche für die Reihe S die ſcalam relationis beſtimme: ihre Wurzeln, ſie ſeyen möglich oder unmöglich, heißen r, ϱ, ſo wird das allgemeine oder n^{te} Glied in der Reihe der Coefficienten, $= a^N = \mathfrak{A}r^n + \mathfrak{B}\varrho^n$, wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ als Conſtanten können angeſehen werden, weil ſie für alle n einen unveränderten Werth haben, welchen zu beſtimmen leicht, aber jetzt überflüßig iſt. Ueberhaupt hat das allgemeine Glied jeder recurrirenden Reihe (oder vielmehr der Coefficient von x^{n+1}) folgende Geſtalt: $\mathfrak{A}r^n + \mathfrak{B}s^n + \mathfrak{C}t^n + \mathfrak{D}u^n +$ &c.: wo r, s, t, u u. ſ. w. die Wurzeln der Gleichung ſind, welche die ſcalam relationis ausdrückt.

3) Der Ausdruck von a^N, in (2), quadrirt gibt das allgemeine Glied der Reihe $\mathfrak{S}$ für $m = 2$. Daſſelbe

wird

wird alſo $= \mathfrak{A}^2 r^{2n} + \mathfrak{B}^2 \varrho^{2n} + 2 \mathfrak{A} \mathfrak{B} (r \varrho)^n$. Nun iſt $r \varrho = \beta$: alſo ſtellt dieſe Größe das allgemeine Glied einer recurrirenden Reihe von der dritten Ordnung dar, zu welcher eine Gleichung mit den Wurzeln r^2, ϱ^2 und β gehört. Dieſe Gleichung ſelbſt findet man ſo: z bedeute alle ihre Wurzeln; ſo iſt $(z - x^2)(z - \beta) = 0$. Aus dieſer Gleichung, mit der andern: $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ verbunden, und x eliminirt, entſteht:

$$(z - \beta)((z + \beta)^2 - \alpha^2) = 0.$$

4) Auf ähnliche Weiſe gibt der Ausdruck in (2) auf die dritte Potenz erhoben, oder für $m = 3$:

$$\mathfrak{A}^3 r^{3n} + 3 \mathfrak{A}^2 \mathfrak{B} r^{2n} \varrho^n + 3 \mathfrak{A} \mathfrak{B}^2 \varrho^{2n} r^n + \mathfrak{B}^3 \varrho^{3n}.$$

Weil $r^{2n} \varrho^n = \beta^n r^n$; $\varrho^{2n} r^n = \beta^n \varrho^n$, ſo entſteht daraus eine recurrirende Reihe der vierten Ordnung: die Wurzeln ihrer Gleichung ſind r^3; ϱ^3; βr; $\beta \varrho$; oder x^3; βx. Dieſe Gleichung, deren unbekannte Größe y heiße, findet ſich alſo durch die Elimination folgender zwoer Gleichungen: $(y - x^3)(y - \beta x) = 0$; $x^2 + \alpha x + \beta = 0$. Sie ſteiget auf den vierten Grad.

5) Eben ſo entſtehen für die nächſthöhern Potenzen folgende Gleichungen:

für $m = 4$; $(y - x^4)(y - \beta x^2)(y - \beta^2) = 0$

für $m = 5$; $(y - x^5)(y - \beta x^3)(y - \beta^2 x) = 0$

für $m = 6$; $(y - x^6)(y - \beta x^4)(y - \beta^2 x^2)(y - \beta^3) = 0$

Das Geſetz iſt hier auffallend, und der Unterſchied bey geraden und ungeraden m deutlich. Allgemein erhellet,

daß für jede m^{te} Potenz die Reihe S in (2) eine recurrirende Reihe von der Ordnung $m+1$ ſeyn werde. Die Gleichung für die ſcalam relationis entſpringt für gerade $m = 2l$ aus der Elimination dieſer zwoen Gleichungen:

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0;$$

$$(y - x^m)(y - \beta x^{m-2})(y - \beta^2 x^{m-4}) \ldots (y - \beta^l) = 0$$

Für ungerade $m = 2l + 1$ wird ſtatt der letzten Gleichung dieſe genommen:

$$(y - x^m)(y - \beta x^{m-2})(y - \beta^2 x^{m-4}) \ldots (y - \beta^l . x) = 0.$$

In beyden Fällen wird x weggeſchafft.

6) Von der Eigenſchaft der Sinuſſe und Coſinuſſe vielfacher Bögen, daß ſie eine recurrirende Reihe bilden, läßt ſich noch folgende Anwendung machen: die Gleichung, welche für dieſen Fall die ſcalam relationis ausdrückt, iſt: $x^2 - 2x \operatorname{coſ.} \varphi + 1 = 0$; folglich wird $r = \operatorname{coſ.} \varphi + \operatorname{ſ.} \varphi . \sqrt{-1}$; $\varrho = \operatorname{coſ.} \varphi - \operatorname{ſ.} \varphi . \sqrt{-1}$; und das allgemeine Glied

$$= \operatorname{coſ.} n\varphi = \mathfrak{A} (\operatorname{coſ.} \varphi + \operatorname{ſ.} \varphi \sqrt{-1})^n + \mathfrak{B} (\operatorname{coſ.} \varphi - \operatorname{ſ.} \varphi . \sqrt{-1})^n$$

Setzt man hier $n = 1$, ſo erhält man zwo Gleichungen für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, nemlich $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 1$; $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = 0$; alſo wird

$$\operatorname{coſ.} n\varphi = \frac{(\operatorname{coſ.} \varphi + \operatorname{ſ.} \varphi . \sqrt{-1})^n + (\operatorname{coſ.} \varphi - \operatorname{ſ.} \varphi . \sqrt{-1})^n}{2}.$$

Eben ſo findet man

$$\operatorname{ſ.} n\varphi = \frac{(\operatorname{coſ.} \varphi + \operatorname{ſ.} \varphi . \sqrt{-1})^n - (\operatorname{coſ.} \varphi - \operatorname{ſ.} \varphi . \sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}$$

und daraus: $(\text{coſ.}\ \varphi \pm \text{ſ.}\ \varphi \sqrt{-1})^n = \text{coſ.}\ n\varphi \pm \sqrt{-1}\ .\ \text{ſ.}\ n\varphi$; bekannte Sätze, welche in den meiſten Elementen der Analyſis vorkommen, doch ohne immer in gehöriger Allgemeinheit erwieſen zu werden *)

IX. Reihen von bejahten Potenzen **) der natürlichen Zahlen, mit Coſinuſſen und Sinuſſen vielfacher Bögen, auch derſelben Potenzen.

1) Bey den Reihen, welche den Gegenſtand der bisherigen Unterſuchung ausmachten, waren die Exponenten von den Potenzen der natürlichen Zahlen verneint: auf ſolche Reihen, wo die Exponenten bejaht ſind, iſt die Anwendung gegenwärtiger Methode noch einfacher. Wenn man in folgender unendlichen Progreſſion:

$$\text{coſ.}\ \varphi - 2^{2m}\,\text{coſ.}\ 2\varphi + 3^{2m}\,\text{coſ}\ 3\varphi - 4^{2m}\,\text{coſ.}\ 4\varphi + \&c. = S. = \Sigma \pm n^{2m}\,\text{coſ.}\ n\varphi,$$

die Coſinuſſe in ihre Reihen auflöſt, ſo wird das allge-

*) *Euleri* Introduct. Cap. VIII. p. 97. Com. Petrop. Nov. T. V. p. 166. An beyden Stellen wird der Beweis für die erſten Fälle geführt, und durch Induction erweitert. Zur völligen Schärfe mußte noch der Schluß von jedem n auf das nächſtfolgende $n+1$ gerechtfertiget werden. Dieſe Ergänzung hier beyzubringen iſt überflüßig, da das Verfahren überhaupt bekannt genug iſt, durch die häufigen Anwendungen, welche Herr Hofrath Käſtner davon gemacht hat, analytiſche Sätze, welche auf dem Wege der Induction gefunden worden ſind, in ihrer Allgemeinheit zu erweiſen.

**) Es wird wohl nicht gegen den Sprachgebrauch ſeyn, bejahte Potenzen diejenige zu nennen, deren Exponent bejaht iſt, ſo wie man unter den zweiten, dritten Potenz u. ſ. w. diejenigen verſteht, bey denen der Exponent = 2, 3 u. ſ. w. iſt.

meine Glied $= \pm n^{2m} \left(1 - \frac{n^2 \varphi^2}{1 \cdot 2} + \frac{n^4 \varphi^4}{1 \ldots 4} - \&c.\right)$
und daraus: S. =

$$\Sigma \pm n^{2m} - \frac{\varphi^2}{1.2} \Sigma \pm n^{2m+2} + \frac{\varphi^4}{1..4} \Sigma \pm n^{2m+4} - \&c.$$

Nun verſchwinden alle hier vorkommende Partialſummen: alſo erhellt, daß auch $S = \Sigma \pm n^{2m}$ coſ. $n\varphi = 0$ ſeyn werde. Eine Ausnahme macht der Fall $2m = 0$; wo $\Sigma \pm n^{2m} = \frac{1}{2}$ iſt: welche Größe demnach auch S für dieſen Fall ausdrückt, wie ſchon oben iſt erwieſen worden. — Setzt man hier ſtatt φ, $\pi - \varphi$: ſo wird, für die Reihe mit gleichen bejahten Zeichen, Σn^{2m} coſ. $n\varphi = 0$, auſſer für $2m = 0$, wo die Summe $= -\frac{1}{2}$ iſt. — Bey Reihen von Sinuſſen verfährt man ganz auf dieſelbige Weiſe, und ſo findet ſich: $\Sigma \pm n^{2m-1}$ ſ. $\varphi = 0$, ohne Einſchränkung: daraus folgt auch Σn^{2m-1} ſ. $\varphi = 0$.

2) Betrachtet man, wie im vorhergehenden, auch Potenzen der Coſinuſſe und Sinuſſe, ſo ergiebt ſich, zuerſt für den einfachſten Fall folgendes: die Reihe:

$$\text{coſ.}\,\varphi^r - \text{coſ.}\,2\varphi^r + \text{coſ.}\,3\varphi^r - \text{coſ.}\,4\varphi^r + \&c. \ldots = S$$

wird mit Hülfe des in (VI. 1.) angegebenen Ausdrucks alſo verwandelt, daß S =

$$= \frac{1}{2^r} \left\{ \begin{array}{l} \text{coſ.}\; r\varphi + \frac{r}{1}.\text{coſ.}(r-2)\varphi + r\frac{(r-1)}{1.2}\text{coſ.}(r-4)\varphi \\ -\text{coſ.}\,2r\varphi - \frac{r}{1}.\text{coſ.}(r-2)2\varphi - \&c. \\ +\text{coſ.}\,3r\varphi + \frac{r}{1}.\text{coſ.}(r-2)3\varphi \\ -\&c. \qquad -\&c. \end{array} \right\}$$

Die Coſinuſſe, welche vertikal unter einander geſchrieben ſind, und einen Binomial-Coefficienten zum Factor haben, machen für ſich Reihen aus, deren gemeinſchaftliche Summe $= \frac{1}{2}$. Daraus folgt S =

$$= \frac{1}{2^{r+1}}\left(1 + r + r\frac{(r-1)}{1 \cdot 2} + r\frac{(r-1)(r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c.\right)$$

$= \frac{1}{2} = \Sigma \pm \text{coſ.}\, n\,\varphi^r$. Setzt man hier vor φ, $\pi - \varphi$, ſo entſteht für ungerade $r = 2\,l - 1$: $\Sigma\, \text{coſ.}\, n\,\varphi^{2l-1}$ $= -\frac{1}{2}$.

3) Auf gleiche Weiſe läßt ſich $\Sigma \pm \text{coſ.}\, n\,\varphi^r \cdot n^{2m}$ behandeln. Wenn man daſſelbe Verfahren beobachtet, ſo wird dieſe Summe

$$= \Sigma \pm \frac{n^{2m}}{2^r}\left\{\begin{array}{l} \text{coſ.}\, r\,n\,\varphi + r\,\text{coſ.}\,(r-2)\,n\,\varphi \\ \qquad + r\frac{(r-1)}{1 \cdot 2}\text{coſ.}\,(r-4)\,n\,\varphi \\ \qquad + \&c. \end{array}\right\}$$

$= 0$, weil nach (1) alle Partialreihen der einfachen Coſinuſſe verſchwinden. Der Fall $m = 0$ iſt wie in (1) ausgenommen. Für ungerade r erhält man wie in (2) $\Sigma\, n^{2m}\, \text{coſ.}\, \varphi^{2l-1} = 0$.

4) Für Reihen von Sinuſſen ergibt ſich:

$$\text{ſ.}\,\varphi^r - 2^m\,\text{ſ.}\,2\,\varphi^r + 3^m\,\text{ſ.}\,3\,\varphi^r - \&c.$$
$$= \Sigma \pm n^m\,\text{ſ.}\,n\,\varphi^r = 0$$

wenn r und m zugleich ungerade oder gerade Zahlen ſind. Im erſten Falle iſt noch $\Sigma\, n^m\, \text{ſin.}\, n\,\varphi^r = 0$; alſo auch $\Sigma\,(2\,n-1)^m \cdot \text{ſin.}\,(2\,n-1)\,\varphi^r = 0$. Setzt man

hier $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ſo wird $\Sigma \pm (2.n - 1)^m$, oder die Summe folgender undendlichen Reihe:

$$1 - 3^m + 5^m - 7^m + \&c. = 0,$$

für jedes ungerade m.

X. Reciproke Reihen von Potenzen der ungeraden Zahlen, auch mit Coſinuſſen und Sinuſſen vielfacher Bögen.

1) Die Reihen, deren Summen hier unterſucht werden ſollen, ſind unter folgenden zwoen Formen begriſſen:

$$\text{coſ.}\,\varphi - \frac{\text{coſ.}\,3\,\varphi}{3^{2m-1}} + \frac{\text{coſ.}\,5\,\varphi}{5^{2m-1}} - \&c.$$

$$= \Sigma \pm \frac{\text{coſ.}\,2\,n - 1)\,\varphi}{(2n-1)^{2m-1}}$$

$$\text{ſ.}\,\varphi - \frac{\text{ſ.}\,3\varphi}{3^{2m}} + \frac{\text{ſ.}\,5\varphi}{5^{2m}} - \&c. = \Sigma \pm \frac{\text{ſ.}\,(2n-1)\,\varphi}{(2\,n-1)^{2m}}$$

Setzt man in der erſten $\varphi = 0$, ſo werden die Zähler alle $= 1$, und man erhält eine Reihe von Potenzen der ungeraden Zahlen mit abwechſelnden Zeichen. Der Exponent der Potenzen iſt gleichfalls eine ungerade Zahl. Für dieſen Fall hat **Euler** die Summation gefunden, auch das Geſetz, nach welchem die Summen fortgehen, bemerkt, mit Hülfe einer Methode, welche der in (I, 1.) angezeigten ähnlich iſt *).

*) Opuſcul. Analyt. T. II. p. 268 &c.

2) Um die Anwendung des ſeither beobachteten Verfahrens bey gegenwärtiger allgemeineren Unterſuchung durch ein Beyſpiel zu erläutern, ſetze man in der erſten Reihe (1) $m = 2$; ſo wird die Summe der Reihe:

$$\text{coſ.}\,\varphi - \frac{\text{coſ.}\,3\varphi}{3^3} + \frac{\text{coſ.}\,5\varphi}{5^3} - \&c. = \mathfrak{S}$$

alſo gefunden. Man löſe die Coſinuſſe von φ, 3φ u. ſ. w. in ihre Progreſſionen auf, ordne ſolche nach den Potenzen von φ zuſammen, ſo erhält man dieſe Verwandlung:

$$\mathfrak{S} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \&c. - \frac{\varphi^2}{1.2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \&c.\right) + \frac{\varphi^4}{1...4}(1 - 3 + 5 - \&c.) - \&c.$$

Die Reihe, welche in $-\frac{\varphi^2}{1.2}$ multiplicirt iſt, hat bekanntlich zur Summe $\frac{\pi}{4}$. Die Summen der folgenden Coefficienten-Reihen verſchwinden; demnach wird $\mathfrak{S} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \&c. - \frac{\varphi^2\pi}{8}$. Setzt man hier $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ſo iſt $\mathfrak{S} = 0$, alſo $\Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$: daraus $\Sigma \pm \frac{\text{coſ.}\,(2n-1)\varphi}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3 - 4\pi\varphi^2}{32}$.

3) Das allgemeine bey dieſem Verfahren iſt leicht leicht abzunehmen. Es wird nemlich folgender Satz zum

Grunde gelegt: $\Sigma \pm (2n-1)^r = 0$, für jedes ungerade r *). Setzt man demnach ſtatt der Coſinuſſe ihre Ausdrückungen durch unendliche Reihen, und nimmt gleiche Potenzen von φ zuſammen, ſo verſchwinden die Coefficienten-Reihen derjenigen Potenzen, welche einen größern Exponenten als $2m-2$ haben. Die Summe der letzten übrigbleibenden Reihe: $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+$ &c. iſt $=\frac{\pi}{4}$. Alſo erhält man: $\Sigma \pm \frac{\text{coſ.}\,(2n-1)\,\varphi}{(2n-1)^{2m-1}} =$

$$= \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-1}} - \frac{\varphi^2}{1.2}.\Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-3}}$$

$$+ \frac{\varphi^4}{1..4}\Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-5}} - \&c \ldots\ldots$$

$$\pm \frac{\varphi^{2m-4}}{1....2m-4}.\Sigma \frac{1}{(2n-1)^3} \mp \frac{\varphi^{2m-2}}{1...2m-2}.\frac{\pi}{4},$$

wobey die obern Zeichen der zween letzten Glieder gelten, wenn m eine gerade; die untern, wenn m eine ungerade Zahl iſt **).

*) Ein Beyſpiel dieſes Satzes, für $r = 1$, findet man in Eulers Inſtit. Calc. Diff. p. 289. So allgemein der Satz hier ausgedrückt iſt, enthält er doch nur einen beſondern Fall der in (IX. 4.) erwieſenen Summation: eben ſo wie der in ähnlicher Abſicht oben (I. 4.) zum Grunde gelegte Satz unter (IX. 2) begriffen iſt.

**) Es iſt offenbar, daß $\Sigma\, a\, \varphi\, n = a\, \Sigma\, \varphi\, n$ iſt, wenn a eine Conſtante bedeutet, dergleichen hier der Bogen φ mit ſeinen Potenzen iſt. Daraus erhellt, daß die allgemeine Summation unmittelbar aus der Entwicklung, von coſ. $(2n-1)\,\varphi$ fließe: und zugleich die Dienlichkeit der hier gewählten Bezeichnungsart zur Erleichterung der allgemeinen Ueberſicht.

4) Man ſetze hier $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ſo verſchwinden coſ. φ, coſ. 3 φ u. ſ. w.; alſo wird:

$$0 = \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-1}} - \frac{\pi^2}{2^2.1.2} \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-3}}$$

$$+ \frac{\pi^4}{2^4.1\ldots4} \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-5}} - \&c. \ldots$$

$$\pm \frac{\pi^{2m-4}}{2^{2m-4}.1.2\ldots2m-4} . \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^3}$$

$$\pm \frac{\pi^{2m-2}}{2^{2m-2}.1\ldots2m-2} . \frac{\pi}{4}.$$

Dieſe Gleichung drückt das allgemeine Geſetz aus, nach welchem die Summen der reciproken Reihen von Potenzen der ungeraden Zahlen, mit abwechſelnden Zeichen, fortgehen. Zugleich überſieht man daraus ihren Zuſammenhang mit der allgemeineren Summation in (3).

5) Bey der Summation der andern Reihe in (1), mit Sinuſſen, wird daſſelbe Verfahren beobachtet. Man erhält nachfolgenden allgemeinen Ausdruck:

$$\Sigma \pm \frac{\text{ſin.}(2n-1)\varphi}{(2n-1)^{2m}} = \varphi \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-1}}$$

$$- \frac{\varphi^3}{1.2.3} \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-3}} + \&c \ldots\ldots$$

$$\pm \frac{\varphi^{2m-3}}{1\ldots2m-3} . \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^3} \mp \frac{\varphi^{2m-1}}{1\ldots2m-2} . \frac{\pi}{1}.$$

6) Für höhere Potenzen der Coſinuſſe und Sinuſſe laſſen ſich ähnliche Sätze, wie in (VI.), erweiſen. So

erhellt, daß $\Sigma \pm \frac{\text{ſin.}\,(2n-1)\,\varphi^r}{(2n-1)^m}$ immer gefunden werden könne, wenn von den beyden Exponenten r und m der eine gerade, der andere ungerade iſt. Für jedes r, was $> m - 1$ iſt, wird die Summe verſchwinden; iſt $r = m - 1$, ſo wird dieſelbe $= \pm \frac{\pi}{4} . \varphi^r$.

XI. Summation der Reihen in (III. IX. X.) unter einer allgemeineren Geſtalt.

1) Aus dem allgemeinen Gliede $= \frac{n^{\pm 2g}}{(n^2 - \lambda^2)^k}$ entſpringt eine Reihe, welche für $\lambda = 0$ die reciproke und directe Reihen der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen unter ſich begreift. Man kann jenen Ausdruck noch durch coſ. $n\,\varphi$, überhaupt durch coſ. $n\,\varphi^r$ multipliciren, oder auch durch ſin. $n\,\varphi$, wenn ſtatt des Exponenten $2\,g$ im Zähler eine ungerade Zahl genommen wird. So ergeben ſich Reihen, von welchen die in (III.) unterſuchten einen beſondern Fall ausmachen. Setzt man hier vor n, $2\,n - 1$, ſo entſteht eine ähnliche allgemeine Form für die Reihen in (X.)

2) Es ſey zuerſt $k = 1$: man mache den Anfang der Betrachtung mit der Reihe von Sinuſſen, daß alſo ſtatt $2\,g$, $2\,g - 1$ geſchrieben wird; ſo findet man $\Sigma \pm \frac{n^{2g-1} . \text{ſin.}\, n\varphi}{n^2 - \lambda^2} = S$, durch gegenwärtige Methode, folgendergeſtalt. Man drücke ſin. $n\,\varphi$ durch die

gehörige unendliche Reihe aus, ſo wird

$$\mathfrak{S} = \varphi\, \Sigma \pm \frac{n^{2g}}{n^2 - \lambda^2} - \frac{\varphi^3}{1.2.3}\, \Sigma \pm \frac{n^{2g+2}}{n^2 - \lambda^2}$$
$$+ \frac{\varphi^5}{1..5}\, \Sigma \pm \frac{n^{2g+4}}{n^2 - \lambda^2} - \text{\&c. in inf.}$$

Nun iſt iſt für jedes bejahte gerade m, $\Sigma \pm \frac{n^m}{n^2 - \lambda^2}$ $= \frac{\lambda^{m-1}\pi}{2\,\text{ſin.}\,\lambda\pi}$ *). Alſo verwandelt ſich $\mathfrak{S}$ in folgenden Ausdruck: $\mathfrak{S} = \frac{\pi\lambda^{2g-2}}{2\,\text{ſin.}\,\lambda\pi}\left(\lambda\varphi - \frac{\lambda^3\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\lambda^5\varphi^5}{1...5} - \text{\&c.}\right)$ Die Summe der Reihe, welche den einen Factor ausmacht, iſt bekanntlich $= \text{ſin.}\,\lambda\varphi$; alſo wird $\mathfrak{S} = \frac{\pi\lambda^{2g-2}.\,\text{ſin.}\,\lambda\varphi}{2\,\text{ſin.}\,\lambda\pi}$. Dieſe Summation, verbunden mit (VII. 7.) **) gibt folgende allgemeinere:

$$\Sigma \pm \frac{n^{2g-1}.\,\text{ſin.}\,n\varphi^r}{n^2 - \lambda^2} = \pm \frac{\pi\lambda^{2g-2}.\,\text{ſin.}\,\lambda\varphi^r}{2\,\text{ſin.}\,\lambda\pi},$$

für jedes ungerade r ***). Differentiirt man dieſe Gleichung, λ als veränderlich angenommen, ſo findet man

*) *Euler* Opuſc. Analyt. T. II. p. 103 &c. vergl. §. ſeq.

**) Wegen der Zeichen gilt auch hier die dort gemachte Bemerkung.

***) Den Fall $g = 1$, $r = 1$ lehrt Euler (l. c. p. 73. 74). Er hat dieſe Summation durch zuſammengeſetzte Integrationen gefunden, und aller Aufmerkſamkeit würdig erklärt: daher es mir nicht überflüßig ſchien zu zeigen, wie gegenwärtige Methode zu einer allgemeineren Summation führe, unter welcher Eulers Satz mit begriffen iſt; auch auſſer dem noch zu andern ähnlichen Summationen. — Der Fall, da g negativ iſt, wird im folgenden §. unterſucht.

die Summe einer Reihe, in welcher ſtatt $n^2 - \lambda^2$, die zweyte Potenz dieſer Größe vorkommt. Die Wiederholung dieſes Verfahrens gibt die Summe für $(n^2 - \lambda^2)^k$.

3) Bey den Reihen von Coſinuſſen verfährt man auf ähnliche Weiſe: es wird nemlich, wenn man coſ. $n\,\varphi$ in eine unendliche Reihe auflöſt,

$$\Sigma \pm \frac{n^{2g}.\text{coſ.}\, n\,\varphi}{n^2 - \lambda^4} = \Sigma \pm \frac{n^{2g}}{n^2 - \lambda^2} - \frac{\varphi^2}{1.2}\,\Sigma \pm \frac{n^{2g+2}}{n^2 - \lambda^2}$$

$$+ \frac{\varphi^4}{1..4}\,\Sigma \pm \frac{n^{2g+4}}{n^2 - \lambda^2} - \text{in inf.}$$

$$= \frac{\lambda^{2g-1}\pi}{2\,\text{ſ.}\,\lambda\,\pi}\left(1 - \frac{\varphi^2\,\lambda^2}{1\,.\,2} + \frac{\varphi^4\,\lambda^4}{1..4} - \&c.\right)$$

$$= \frac{\lambda^{2g-1}\pi\,.\,\text{coſ.}\,\lambda\,\varphi}{2\,\text{ſin.}\,\lambda\,\pi}.$$

Iſt $g = 0$, ſo wird $\Sigma \pm \frac{n^{2g}}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\pi}{2\,\lambda\,\text{ſin.}\,\lambda\,\pi} - \frac{1}{2\,\lambda^2}$; alſo für dieſen Fall auch $\Sigma \pm \frac{\text{coſ.}\,n\,\varphi}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\pi\,\text{coſ.}\,\lambda\,\varphi}{2\,\lambda\,\text{ſ.}\,\lambda\,\pi} - \frac{1}{2\,\lambda^2}$ *). Für jedes andere g gilt der nur erwieſene Ausdruck. Verbindet man dieſe Summationen mit dem in (VI. 1.) angegebenen Ausdrucke für coſ. φ^r, ſo erhält man: $\Sigma \pm \frac{n^{2g}\,\text{coſ.}\,n\,\varphi^r}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\pi\,\lambda^{2g-1}\,\text{coſ.}\,\lambda\,\varphi^r}{2\,\text{ſin.}\,\lambda\,\pi}$. Für $g = 0$ muß noch $\frac{1}{2\,\lambda^2}$ abgezogen werden. — Da eine

*) Dieſen Fall hat Euler (l. c.) aus dem Fall $g = 1$ bey der andern Reihe, abgeleitet.

gerade Potenz des Sinus in Coſinuſſe aufgelöſet wird, ſo fließt aus jener Summation für gerade r noch folgender Satz: $\Sigma \pm \frac{n^{2g} \,.\, \text{ſ.}\, n\varphi^r}{n^2 - \lambda^2} = \pm \frac{\lambda^{2g-1} \,.\, \pi \,.\, \text{ſ.}\, \lambda\varphi^r}{2\, \text{ſ.}\, \lambda\pi}$.

Für höhere Potenzen von $n^2 - \lambda^2$ werden die Summen durch fortgeſetzte Differentiationen gefunden.

4) Die Reihen in (X.) laſſen ſich auf ähnliche Weiſe allgemeiner betrachten. Es iſt nemlich

$$\Sigma \pm \frac{(2n-1)^{2g-1} \,.\, \text{coſ.}\,(2n-1)\varphi}{(2n-1)^2 - \lambda^2} =$$

$$\Sigma \pm \frac{(2n-1)^{2g-1}}{(2n-1)^2 - \lambda^2} - \frac{\varphi^2}{1.2} \Sigma \pm \frac{(2n-1)^{2g+1}}{(2n-1)^2 - \lambda^2}$$

+ &c. Nun iſt für jedes ungerade q,

$$\Sigma \pm \frac{(2n-1)^q}{(2n-1)^2 - \lambda^2} = \frac{\pi\lambda^{q-1}}{4\, \text{coſ.}\, \frac{\lambda\pi}{2}}.$$ Alſo wird jene

$$\text{Summe} = \frac{\pi\lambda^{2g-2}}{4\, \text{coſ.}\, \frac{\lambda\pi}{2}} \left(1 - \frac{\lambda^2\varphi^2}{1.2} + \frac{\lambda^4\varphi^4}{1..4} - \&c.\right)$$

$$= \frac{\pi\lambda^{2g-2}}{4\, \text{coſ.}\, \frac{\lambda\pi}{2}} . \text{coſ.}\, \lambda\varphi$$ — Kommt in dem allgemeinen Gliede der Reihe ſtatt coſ. $(2n-1)\varphi$, jedwede $r$te Potenz dieſes Coſinus vor, ſo wird in die Summe eben- dieſelbe Potenz von coſ. $\lambda\varphi$ geſetzt.

5) Auf gleiche Weiſe erhält man

$$\Sigma \pm \frac{(2n-1)^{2g} \text{ſin.} (2n-1)\varphi}{(2n-1)^2 - \lambda^2} = \frac{\pi \lambda^{2g-1}}{4 \text{coſ.} \frac{\lambda\pi}{2}} \text{ſin.} \lambda \varphi$$

Für eine ungerade Potenz von ſin. $(2n-1)\varphi$ kommt in die Summe eben dieſe Potenz von ſin. $\lambda\varphi$; aber für ein gerades r wird $\Sigma \pm \frac{(2n-1)^{2g-1} . \text{ſ.} (2n-1)\varphi^r}{(2n-1)^2 - \lambda^2}$

$$= \frac{\pi \lambda^{2g-2}}{4 \text{coſ.} \frac{\lambda\pi}{2}} . \text{coſ.} \lambda \varphi^r.$$

Für höhere Potenzen des Nenners finden ſich die Summen durch wiederholte Differentiationen, λ als veränderlich angenommen.

XII. Fortſetzung.

1) Die in (XI. 2.) vorausgeſetzte Summation:

$\Sigma \pm \frac{n^{2g}}{n^2 - \lambda^2} = \mathfrak{S} = \frac{\lambda^{2g-1} \pi}{2 \text{ſin.} \lambda \pi}$ beruhet auf folgenden Gründen: für $g = 0$ wird, durch Zerfällung des quadratiſchen Factors in zween einfache,

$\mathfrak{S} = \frac{1}{2\lambda}\left(\Sigma \pm \frac{1}{n-\lambda} - \Sigma \pm \frac{1}{n+\lambda}\right)$. Dieſe einfachen Reihen laſſen ſich leicht in Integrale auflöſen, und ſo erhält man $\mathfrak{S} = -\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda} \text{ſ.} \frac{(x^{\lambda-1} + x^{-\lambda}) dx}{1+x}$,

das Integral ſo genommen, daß es für $x = 0$ verſchwindet, und dann $x = 1$ geſetzt wird. Nun iſt in dieſem

Sinne der Werth des Integrals *) $= \frac{\pi}{\text{ſin.}\, \pi \lambda}$; alſo wird $S = -\frac{1}{2\varkappa^2} + \frac{\pi}{2\lambda\,.\,\text{ſin.}\, \lambda \pi}$.

2) Für jedes ganze bejahte g ergibt ſich durch Diviſion $\frac{n^{2g}}{n^2 - \lambda^2} = n^{2g-2} + \lambda^2 n^{2g-4} + \ldots\ldots + \lambda^{2g-2}\,.\,n^0 + \frac{\lambda^{2g}}{n^2 - \lambda^2}$. Nun iſt immer $\Sigma \pm n^{2m} = 0$, außer für $m = 0$, da dieſe Summe $= \frac{1}{2}$ wird. Daraus folgt: $\Sigma \pm \frac{n^{2g}}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\lambda^{2g-2}}{2} + \lambda^{2g}\left(\frac{\pi}{2\lambda\,\text{ſ.}\,\lambda\pi} - \frac{1}{2\lambda^2}\right) = \frac{\pi \lambda^{2g-1}}{2\,\text{ſin.}\,\lambda\pi}$ **).

*) Dieſe Integration hat Euler zuerſt in den Miſcell. Berolin. T. VII. p.129 u. ſ. w. gelehrt: und nachgehends eben denſelben Beweis wiederholt in den Nov. Comment. Petrop. T. XIX. und in den Act. Petrop. P. I. (1781). Eigentlich iſt das in dieſen Stellen unterſuchte Integral $= \text{ſ.}\, \frac{(y^{m-1} + y^{n-m-1})\,dy}{1 + y^n}$. Setzt man aber $y^n = x$, ſo erhält das Integral im Text eben dieſelbe allgemeinere Form.

**) Dieſe Summation erweiſt Euler in den Opuſc. Analyt. T. II. p. 130 &c. (Petrop. 1785). Er bedient ſich dabey eines beſondern Verfahrens, tranſcendente Summen unendlicher Reihen zu finden, was mit demjenigen einige Aehnlichkeit hat, wodurch er zuerſt die Summen der reciproken Reihen entdeckte (I. 1). Weil nemlich Sinuſſe und Coſinuſſe durch Producte aus unendlich vielen Factoren ſich darſtellen laſſen, ſo zerfällt er Functionen, in welchen jene als Nenner vorkommen, in unendlich viele einfache Partial-Brüche. Vielleicht könnte man noch zweifeln, ob jenes Verfahren, deſſen Richtigkeit für alge-

3) Aus (1) folgt $\Sigma \pm \frac{\text{coſ.}\, n\, \varphi}{n^2 - \lambda^2}$, übereinſtimmend mit der Angabe in (XI. 4). Setzt man vor φ, $\pi - \varphi$, ſo werden alle Zeichen in der Reihe negativ, und man erhält $\Sigma \frac{\text{coſ.}\, n\, \varphi}{n^2 - \lambda^2} = - \frac{1}{2\, \lambda^2} + \frac{\pi\, \text{coſ.}\, \lambda\, (\pi - \varphi)}{2\, \lambda\, \text{ſin.}\, \lambda\, \pi}$.

Für

braiſche Functionen und eine endliche Zahl von Factoren erwieſen iſt (Käſtners Analyſ. d. Unendl. §. 347 ꝛc.), auf transcendente Functionen und unendliche Reihen-Ausdrücke in gehöriger Schärfe angewandt werde. Wenn auch im Zähler eine transcendente Function vorkommt, wie im Nenner, wo alſo in beyden die Dimenſion unendlich iſt, geſteht Euler ſelbſt, daß das Verfahren nicht mit Sicherheit könne gebraucht werden: bey Reihen, die er doch auch in dieſem Falle dadurch ſummirt hat, ſucht er den Zweifel ſo zu heben, daß er in beſondern Fällen die Richtigkeit des Reſultats noch aus andern Gründen zeigt. — Indeſſen auch dieſe Betrachtungen beyſeite geſetzt, bleibt doch, wie es mir ſcheint, die angezeigte Methode, als Summations-Methode, indirect, weil die Summen angenommen, und daraus die Reihen erſt gebildet werden; und dann particular, weil ſie nur gerade bey ſolchen Reihen, in deren Summen Sinuſſe und Coſinuſſe als Nenner vorkommen, brauchbar ſeyn kann. — Deswegen habe ich mich bey gegenwärtiger Unterſuchung eines andern Verfahrens bedient, was mit der vorhergehenden Darſtellungsart genauer zuſamenhängt. Auch ſchien mir es nicht überflüßig, einige andere Summationen, welche Euler auf die angezeigte Weiſe gefunden hat, aus andern Grunden abzuleiten. Meiſtens — ſo auch hier — zeigt ſich bey Sätzen, die auf einem abgelegenen Nebenwege gefunden worden ſind, daß ihre Unterſuchung aus allgemeinern Gründen auch allgemeinere Reſultate gibt. So findet man z. B. die Summen auch für ungerade und verneinte Exponenten (nach 4. und 5.), auf welche jenes Verfahren unmittelbar ſich nicht erſtreckt: obgleich Euler, durch einen Rechnungsfehler verleitet, daſſelbe auch auf ungerade Exponenten angewendet hat.

Für $\varphi = 0$ folgt daraus $\Sigma \frac{1}{n^2 - \lambda^2} = - \frac{1}{2\lambda^2}$ $+ \frac{\pi}{2\lambda . \text{tang.} \lambda \pi}$. Wenn man dieſe Summe, wie in (1) durch Integrale ausdrückt, ſo ergiebt ſich $\int \frac{(x^{\lambda - 1} - x_{-\lambda}) \, d x}{1 - x} = \frac{\pi}{2 \lambda \text{ tang. } \lambda \pi}$: den Werth des Integrals von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen *).

4) Für ungerade Exponenten im Zähler läßt ſich $\pm \frac{n^{2g-1}}{n^2 - \lambda^2}$ eben ſo wie in (2) auflöſen: und ſo folgt die Summe der unendlichen Reihe für dieſes allgemeine Glied $= \Sigma \pm n^{2g-3} + \lambda^2 \Sigma \pm n^{2g-5}$ $+ \ldots + \lambda^{2g-4} \Sigma \pm n + \lambda^{2g-2} \Sigma \pm \frac{n}{n^2 - \lambda^2}$.

Dieſe Partial-Summen laſſen ſich, bis auf die letzte, bequem durch die Bernoulliſchen Zahlen ausdrücken. Es iſt nemlich **) für jedes ungerade $2r - 1$, $\Sigma \pm n^{2r-1} = \pm \left(\frac{2^{2r} - 1}{2r} \right) \mathfrak{A}^R$, wenn $\mathfrak{A}^R$ die $r$te Bernoulliſche Zahl bedeutet. Das obere Zeichen gilt für ein ungerades, das untere für ein gerades r. Alſo kommt es nur noch auf $\Sigma \pm \frac{n}{n^2 - \lambda^2}$ an. Durch Zerfällung findet ſich das doppelte dieſer Summe

*) Dieſe Integration hat Euler auch beſonders erwieſen (l. c. vergl. die vornächſte Anm.)

**) Inſtit. Calc. Diff. P. II. p. 201. Vergl. unten §. XV.

$= \text{ſ.}\, \frac{(x^{\lambda} + x^{-\lambda}) \lambda x}{1 + x}$, von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen. Wenn $\lambda = \frac{p}{q}$, wo p und q ganze Zahlen bedeuten müſſen, p eine kleinere als q, ſo läßt ſich das Integral angeben *). Es findet ſich nemlich, wenn man die Rechnung gehörig führt und abkürzt, $= \frac{1}{2\lambda} + \frac{\text{ſ.}\, 2 p \pi}{2\, \text{ſ.}\, \pi \lambda} \log. 2$
$+ \text{S.} \cos. (2n - 1) \lambda \pi . \log. \left(1 + \frac{\cos. (2n-1)\pi}{2q}\right)$
wobey S (wie bisher) eine endliche Summe andeutet, nemlich die Summe aller Werthe der nach dem Zeichen geſchriebenen Größen, hier von $n = 1$ bis $n = q$ genommen **).

5) Für negative Exponenten des Zählers gilt daſſelbe Verfahren. Es wird nemlich durch Zerfällung:

$$\frac{1}{n^{2g}(n^2 - \lambda^2)} = \frac{1}{\lambda^{2g}(n^2 - \lambda^2)} - \frac{1}{\lambda^{2g} n^2}$$
$$- \frac{1}{\lambda^{2g-2} n^4} - \ldots - \frac{1}{\lambda^2 n^{2g}}$$ (wovon man ſich

*) Käſtners Analyſ. des Unendl. §. 298/99. Die Subſtitutionen, die man vorher noch gebrauchen muß, verſtehen ſich von ſelbſt.

**) Nach Eulern iſt für ungerade m, $\Sigma \pm \frac{n^m}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\lambda^m \pi}{2\, \text{ſ.}\, \lambda \pi}$ welche Angabe von der im Text gänzlich verſchieden iſt. Daß ſie nicht die richtige ſey, erhellt ſchon daraus, weil ſonſt dieſe Summe mit der für den nächſtfolgenden geraden Exponenten einerley ſeyn müßte. Man wird aber auch den Grund des Verſehens mit mäßiger Aufmerkſamkeit entdecken. So erhalten auch die daraus abgeleiteten Folgerungen eine ganz andere Geſtalt.

auch überzeugen kann, wenn man die abgezogene Reihe als eine geometriſche ſummirt). Nun ſind $\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m}}$; $\Sigma \frac{1}{n^{2m}}$ für jedes gerade $2m$ aus (III.) bekannt, und $\Sigma \pm \frac{1}{n^2 - \lambda^2}$; $\Sigma \frac{1}{n^2 - \lambda^2}$ aus (1) und (3). Daraus findet man alſo auch $\Sigma \pm \frac{1}{n^{2g}(n^2 - \lambda^2)}$; $\Sigma \frac{1}{n^{2g}(n^2 - \lambda^2)}$: gleicherweiſe ergeben ſich daraus die Summen dieſer Reihen, wenn im Zähler $\cos.\, n\,\phi$ oder eine jedwede Potenz davon vorkommt. Für Reihen von Sinuſſen erhält man durch dieſes Verfahren $\Sigma \pm \frac{\sin.\, n\,\phi}{n^{2g-1}(n^2 - \lambda^2)}$, wo alſo der Exponent von n im Nenner eine ungerade Zahl ſeyn muß. Sonſt läßt ſich für ſolche Exponenten $\Sigma \pm \frac{1}{n^{2g-1}(n^2 - \lambda^2)}$ nicht angeben, außer wann $g = 1$, in welchem Falle dieſe Summe $= \frac{\log.\, 2}{\lambda^2} + \int. \frac{(x^{\lambda - 1} - x^{-\lambda})\, dx}{1 + x}$ wird; das Integral iſt mit dem in (4) einerley.

6) Wenn im Nenner ſtatt $n^2 - \lambda^2$, $n^2 + \mu^2$ vorkommt, ſo ſetzt man $\lambda = \mu \sqrt{-1}$, und gebraucht ſtatt der Sinuſſe und Coſinuſſe ihre imaginäre Ausdrükkungen durch Exponential-Größen: dabey heben ſich die unmöglichen Größen durch Diviſion auf. Nach dieſer

Vorſchrift findet ſich zum Beyſpiel $\Sigma \pm \frac{n^{2g} \cos. n\phi}{n^2 + \mu^2}$

$= \pm \frac{\mu^{2g-1} . (e^{\mu\phi} - e^{-\mu\phi})}{e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}}$, wobey das obere

Zeichen gilt, wenn g eine ungerade Zahl iſt; ſonſt gilt das untere.

7) Wenn man die Gründe des ſeitherigen Verfahrens im allgemeinen überſieht, ſo wird man bald bemerken, daß ſich daſſelbe noch weiter erſtrecke. Es ſey N eine ganze, rationelle und zwar **gerade Function** des Index n, d. i. eine ſolche, welche nur gerade Potenzen von n enthält, ſo wird in der Gleichung $N = 0$ einer bejahten Wurzel $+\lambda$, die gleiche verneinte $-\lambda$, einer unmöglichen $+\mu\sqrt{1}$, die andere $-\mu\sqrt{-1}$ entſprechen. Die Factoren der Function N ſind demnach unter den zwey Formen: $n^2 - \lambda^2$, $n^2 + \mu^2$, begriffen: im Fall gleicher Wurzeln können auch jedwede Potenzen dieſer Größen, für λ oder $\mu = 0$, auch Potenzen von n, aber nur gerade, vorkommen. Nun ſey M auch eine gerade Function von n, daß alſo $\frac{M}{N}$ eine eben ſolche gebrochene Function vorſtelle: ſo wird ſich dieſe in Brüche von der Form: $\frac{\mathfrak{A}}{n^2 - \lambda^2}$, und $\frac{\mathfrak{B}}{n^2 + \mu^2}$ auflöſen laſſen, wenn die Dimenſion in M kleiner iſt als die in N: erwähntermaßen können auch durch dieſe Zerfällung Potenzen eines ſolchen quadratiſchen Factors, oder gerade Potenzen von n in die Nenner der Partialbrüche kommen. Damit die ſeitherigen Betrachtungen verbunden, ergibt

ſich allgemein, wie nachſtehende Summen: $\Sigma \pm \frac{M}{N}$; $\Sigma \frac{M}{N}$; $\Sigma \pm \frac{M}{N} \cos. n\,\phi$; $\Sigma \frac{M}{N} \cos. n\,\phi$; gefunden werden können. Iſt die Dimenſion von n in M größer als in N, ſo läßt ſich durch Diviſion eine ganze Function $\mathfrak{N}$ abſondern, die gleichfalls nur gerade Potenzen von n, und zuletzt die 0te oder eine beſtändige Größe C enthalten wird. Aus dem vorhergehenden (IX. 1.) iſt bekannt, daß $\Sigma \pm \mathfrak{N} = \frac{C}{2}$ ſeyn werde: eben dieſer Ausdruck gilt auch für $\Sigma \pm \mathfrak{N} . \cos. n\,\phi$; aber $\Sigma\,\mathfrak{N}$ wird unendlich. — Wenn von den beyden Functionen M und N, die eine ungerade iſt, ſo ergiebt ſich auf ähnliche Weiſe $\Sigma \pm \frac{M}{N} . \sin. n\,\phi$; $\Sigma \frac{M}{N} . \sin. n\,\phi$. — Als Reſultat dieſer Betrachtungen fließt endlich daraus die allgemeine Summation aller unendlichen Reihen, mit gleichen oder abwechſelnden Zeichen, deren allgemeines Glied durch $\phi\,n$; $\phi\,n . \cos. n\,\phi$; $\psi\,n . \sin. n\,\phi$ ausgedrückt wird: wenn $\phi\,n$. irgend eine algebraiſche rationelle gerade Function von n: $\psi\,n$ eine ungerade vorſtellt. Nimmt man noch dazu, was in (VI.) und (VII.) iſt geſagt worden, ſo erhellt, daß in dem zweyten Ausdrucke, ſtatt $\cos. n\,\phi$, jedwede ganze Function des Coſinus, oder eine ganze gerade Function von $\sin. n\,\phi$, in dem dritten Ausdrucke eine eben ſolche ungerade Function vorkommen könne. Man bemerkt leicht, wie die reciproke Reihen von den geraden Potenzen der natürlichen Zahlen und diejenigen Reihen, welche ich vorhin nach

Eulern angeführt habe, unter jener allgemeinen Form als einzelne Fälle begriffen ſind.

8) Eben dieſelbigen Schlüſſe laſſen ſich anbringen, um die in (XI. 4.) angefangenen Betrachtungen für ungerade Zahlen, zu ihrer größten Allgemeinheit zu erheben. Zuerſt für den einfachſten Fall iſt $\Sigma \pm \frac{2n-1}{(2n-1)^2-\lambda^2}$ $= S = \frac{1}{2}\left(\Sigma \pm \frac{1}{2n-1+\lambda} + \Sigma \pm \frac{1}{2n-1-\lambda}\right)$. Dieſe zwey Summen laſſen ſich wiederum in Integrale auflöſen, und ſo erhält man $S = \frac{1}{2} \int \frac{(x^\lambda + x^{-\lambda})\, dx}{1-x^2}$ $= \frac{\pi}{4 \cos. \frac{\pi\lambda}{2}}$ (den Werth des Integrals in dem mehrmals erwähnten Sinne genommen) Kommt in dem allgemeinen Gliede ſtatt $2n-1$, eine ungerade Potenz davon vor, mit dem Exponenten q, ſo wird der Zähler des Ausdrucks der Summe noch mit λ^{q-1} multiplicirt. Verneinte Exponenten werden wie in (5) behandelt. So ergiebt ſich wie in (7) die allgemeine Summation aller Reihen mit abwechſelnden Zeichen, deren allgemeine Glieder durch $\pm\psi.(2n-1)$; $\pm\psi(2n-1).\cos.(2n-1)\varphi$; $\pm\varphi(2n-1).\sin.(2n-1)\varphi$, dargeſtellt werden: wenn φ und ψ eben die Bedeutungen haben wie in (7); durch φ eine gerade, durch ψ eine ungerade Funktion, ganze oder gebrochene, von $2n-1$ bezeichnet wird *).

*) Es verſteht ſich daß eine gebrochne Function dann ungerade iſt, wenn Zähler und Nenner in dieſer Hinſicht ungleichartig ſind, d. i. der eine eine ungerade, der andere eine gerade

XIII. Zuſatz von einigen andern ähnlichen Reihen.

1) Unter die Reihen, deren Summen Euler durch die in der Anmerkung zu (XII. 2.) erwähnte Methode gefunden hat, gehört folgende:

$$\frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} + \frac{1}{(\lambda - 2)^2 - \mu^2} + \frac{1}{(\lambda + 2)^2 - \mu^2}$$
$$+ \frac{1}{(\lambda - 4)^2 - \mu^2} + \&c. = \mathfrak{S}$$

Eigentlich iſt dieſe Reihe eine Verbindung zwoer andern, welche denen vorhin betrachteten ähnlich ſind: der einen allgemeines Glied iſt $\frac{1}{(\lambda + 2n)^2 - \mu^2}$; der andern $\frac{1}{(\lambda - 2n)^2 - \mu^2}$ (dort wird n von 0 an gerechnet). So läßt ſich hier gleichfalls das obige Verfahren der Zerfällung und Integration anbringen. Es entſtehen vier Partialreihen, deren jede durch ein Integral dargeſtellt werden kann. Daraus ergibt ſich:

$$\mathfrak{S} = -\frac{1}{2\mu} \int \frac{(x^{\alpha - 1} - x^{-\alpha + 1})\,dx}{1 - x^2}$$
$$+ \frac{1}{2\mu} \int \frac{(x^{\beta - 1} - x^{-\beta + 1})\,dx}{1 - x^2},$$

wenn der Kürze wegen $\lambda + \mu = \alpha$, $\lambda - \mu = \beta$ geſetzt

Function iſt. Der charakteriſtiſche Unterſchied zwiſchen dieſen beyden Arten von Functionen beruhet darauf, daß die von der einen Art ihren Werth nicht verändern, wenn vor $+x$, $-x$ geſetzt wird, die von der andern Art alsdann einen entgegengeſetzten Werth annehmen.

wird. Nimmt man die Particular-Werthe dieſer Integrale, wie ſie in (XII. 3.) angegeben ſind *), ſo wird

$$\mathfrak{S} = \frac{\pi}{4\mu}\left(\cot.\frac{\beta\pi}{2} - \cot.\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2\mu}\cdot\frac{\text{ſin.}\,\mu\pi}{\text{coſ.}\,\mu\pi - \text{coſ.}\,\lambda\pi}.$$

Dieſen Ausdruck, mit einiger Veränderung, hat **Euler** angenommen, und daraus, vermittelſt des angezeigten Verfahrens, die Reihe gebildet.

2) Auf ähnliche Weiſe findet man die Summe jener Reihe, wenn die Zähler ihrer Glieder nach der Ordnung λ; $\lambda - 2$; $\lambda + 2$; u. ſ. w. ſind, nemlich immer die Größen, von deren Quadrat in den Nennern μ^2 abgezogen wird. Die Summe der ſo entſtehenden Reihe iſt

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\text{ſin.}\,\lambda\pi}{\text{coſ.}\,\mu\pi - \text{coſ.}\,\lambda\pi}.$$

3) Unterſucht man die Gründe dieſes Verfahrens näher, ſo zeigt ſich, daß ſich daſſelbe auch auf den Fall erſtrecke, wenn in den Reihen (1) (2) von λ ſtatt der geraden Zahlen, die natürlichen Zahlen nach der Ordnung abgezogen werden, ſonſt aber die Reihen unverändert bleiben. Unter dieſer Geſtalt findet ſich die Summe der Reihe in (1), $= \frac{\pi}{2\mu}(\cot.\,\beta\pi - \cot.\,\alpha\pi)$; der in (2) $= \frac{\pi}{2}(\cot.\,\beta\pi + \cot.\,\alpha\pi)$. Das Verfahren

*) Die gegenwärtigen Integrale laſſen ſich nemlich leicht auf das dortige zurückbringen, wenn man $x^2 = y$ ſetzt.

beruhet wiederum auf der Zerfällung und Ausdrückung der Partial-Summen durch Integrale.

4) Die Größen, welche bey der in (2) betrachteten Reihe die Zähler ausmachen, können auch in die Nenner gebracht werden: dann ergiebt ſich die Summe einer ſolchen Reihe $= \frac{\pi}{2\mu} \cdot \frac{(1 - \cos. \mu\pi)}{\cos. \mu\pi - \cos. \lambda\pi} \cdot \cot. \frac{\lambda\pi}{2}$.
Unter dieſer Geſtalt läßt ſich auch die Reihe in (3) ſummiren.

5) Reihen, deren allgemeines Glied zum Zähler 1 hat, zum Nenner ein Product aus quadratiſchen Factoren von der Form $(n+\alpha)^2$, wo α eine ganze Zahl iſt, laſſen ſich, durch eben dieſes Verfahren der Zerfällung, auf die ſchon in (III.) unterſuchten Reihen zurückführen. Es ſey nemlich das allgemeine Glied

$$= \frac{1}{n^2 (n+\alpha)^2 (n+\beta)^2 (n+\gamma)^2 \,\&c.} = N,$$

ſo erhält man durch Auflöſung in Partial-Brüche,

$$N = \frac{\mathfrak{A}}{n^2} + \frac{\mathfrak{B}}{n} + \frac{\mathfrak{C}}{(n+\alpha)^2} + \frac{\mathfrak{D}}{(n+\alpha)} + \&c.$$

Die Summen der quadratiſchen Brüche können aus (III.) genommen werden; es iſt nemlich für jedes ganze α, $\Sigma \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \Sigma \frac{1}{n^2} - S. \frac{1}{n^2}$, wo die abgezogene Größe die endliche Summe $1 + \frac{1}{2^2} + \&c. + \frac{1}{\alpha^2}$ bedeutet. Die Summen der einfachen Brüche werden unendlich, und mithin auch ΣN, wenn nicht $\mathfrak{D} = -\mathfrak{B}$

wird: dann hebt ſich das unendliche auf; bey den übrigen Factoren wird zur Endlichkeit der Summe eine ähnliche Bedingung erfordert. Sind aber die Zeichen der Glieder in der Reihe abwechſelnd, ſo iſt $\Sigma \pm \frac{1}{n} = \log. 2$: Durch dieſen Logarithmen läßt ſich überhaupt, für jedes ganze α, $\Sigma \pm \frac{1}{\alpha + n}$ ausdrücken. Zugleich erhellt, daß im Zähler des allgemeinen Glieds N ſtatt 1, jede ganze Function des Index n vorkommen könne. Dieſes iſt die allgemeinſte Darſtellungsart des Problems. Die ſpecielle Auflöſung verändert ſich nach der Beſchaffenheit der Zähler A, B. u. ſ. w. von den Partialbrüchen, und der ganzen Zahlen α, β u. ſ. w., welche in den Factoren des Nenners befindlich ſind: jene hängen zum Theil von dem Zähler des allgemeinen Glieds, zum Theil von den nur genannten Zahlen ab. So kann ſich, auch bey Reihen mit abwechſelnden Zeichen, in manchen Fällen der logarithmiſche Theil aufheben: oder bey Reihen mit gleichen Zeichen, das Unendliche, wie ſchon iſt erwähnt worden. Um davon ein Beyſpiel zu geben, ſo findet ſich für zween Factoren im Nenner, $\Sigma \frac{1}{n^2 (n + \alpha)^2} = - \frac{2}{\alpha^3} . S. \frac{1}{n} + \frac{\pi^2}{3 \alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} . S. \frac{1}{n^2}$, in welchem Ausdrucke die durch S angedeuteten endlichen Summen von $n = 1$ bis $n = \alpha$ genommen werden. Eben dieſe Reihe mit abwechſelnden Zeichen hat zur Summe: $\frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - S \pm \frac{1}{n^2} \right)$

$-\frac{2}{\alpha^3} S \pm \frac{1}{n}$, wenn α eine gerade Zahl iſt: wegen der endlichen Summen gilt eben daſſelbe. Iſt aber α eine ungerade Zahl, ſo wird $\Sigma \pm \frac{1}{n^2 (n+\alpha)^2} = \frac{1}{\alpha^2} . S \pm \frac{1}{n^2}$ $-\frac{2}{\alpha^3}\left(2 \log. 2 - S \pm \frac{1}{n}\right)$. Hier hebt ſich alſo derjenige Theil auf, welcher von der Quadratur des Kreiſes abhängt: aber der logarithmiſche Theil bleibt übrig. Für eine beliebige Anzahl $= m$ von quadratiſchen Factoren im Nenner iſt $\Sigma \frac{1}{n^2 (n+\alpha)^2 (n+\beta)^2 (n+\gamma)^2 \ldots}$ $= (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \ldots) \frac{\pi^2}{6} - \mathfrak{B} . S \frac{1}{\alpha^2}$ $- \mathfrak{C} . S \frac{1}{\beta^2} - \mathfrak{D} . S \frac{1}{\gamma^2} - \text{\&c.} - B . S \frac{1}{\alpha} - C . S \frac{1}{\beta}$ $- D . S \frac{1}{\gamma} - \text{\&c.}$ *), wenn die Zähler der durch die Zerfällung des allgemeinen Glieds entſpringenden quadratiſchen Partial-Brüche $= \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ u. ſ. w., der einfachen Brüche Zähler $= A, B, C, D$ u. ſ. w. ſind. Dabey liegt dieſe Betrachtung zum Grunde; die Zähler werden dadurch beſtimmt, daß man alle Brüche auf den gemeinſchaftlichen Nenner bringt, wobey dann der ge-

*) Unter $S \frac{1}{\alpha^2}$ verſtehe ich hier, der bisherigen Bezeichnungsart gemäß, die endliche Summe der quadratiſchen Brüche $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \ldots + \frac{1}{\alpha^2}$; eben ſo ſind $S \frac{1}{\beta^2}$, $S \frac{1}{\gamma^2}$ u. ſ. w. zu nehmen.

meinſchaftliche Zähler dem des allgemeinen Glieds gleichen muß. So wird der Coefficient der $2m - 1^{ten}$ Potenz von n, $= A + B + C + D + \&c. = 0$, weil dieſe Potenz fehlt. Daher fällt immer das Unendliche, was in $\Sigma \frac{1}{n}$, $\Sigma \frac{1}{n + \alpha}$ u. ſ. w., zu liegen ſcheint, weg. Dieſe Betrachtung erſtreckt ſich noch weiter, und zeigt überhaupt, daß der angegebene Ausdruck der Summe auch dann gelte, wenn im Zähler des allgemeinen Glieds, ſtatt 1, irgend eine ganze Function von n vorkommt, deren Dimenſion wenigſtens um 2 geringer iſt, als die des Nenners. Wie für jeden beſondern Fall die Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ u. ſ. w. A, B u. ſ. w. gefunden werden, bedarf hier keiner weitern Entwicklung. — Betrachtet man eben ſolche Reihen mit abwechſelnden Zeichen, ſo verändert ſich der Ausdruck der Summe vorzüglich nach Beſchaffenheit der Zahlen α, β, γ u. ſ. w.: ſind dieſe alle gerade, ſo fällt der logarithmiſche Theil weg, und die Summe wird $= (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \&c.) \frac{\pi^2}{12} - \mathfrak{B} . S \pm \frac{1}{\alpha^2}$

$$- \mathfrak{C} . S \pm \frac{1}{\beta^2} - \&c. - B . S \pm \frac{1}{\alpha} - C . S \pm \frac{1}{\beta}$$

— &c.: ſind aber unter den Zahlen ungerade, ſo beſteht die Summe aus 3 Theilen, einem algebraiſchen, einem zweyten welcher log. 2, und einem dritten, welcher π^2 enthält; dieſer dritte kann nach Beſchaffenheit der Zähler $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ . . . auch wegfallen. — Werden ſtatt der natürlichen Zahlen, die ungeraden betrachtet, daß alſo ſtatt n, $2n - 1$ geſchrieben wird, oder noch allgemeiner $fn \pm g$, ſo laſſen ſich ähnliche Schlüſſe anbringen, und

eben ſolche Sätze erweiſen. Es wird hinlänglich geweſen ſeyn, das Verfahren im allgemeinen darzuſtellen, da die Auflöſung der einzelnen Fälle leicht daraus abgeleitet werden kann *).

6) Verbindet man ſolche Reihen, wie in (5) unterſucht worden ſind, mit Reihen von Coſinuſſen, ſo iſt auf den erſten Blick ſichtbar, daß die Bögen nicht, wie ſeither, nach Vielfachen der natürlichen Zahlen fortſchreiten können. So kann z. B. $\Sigma . \frac{\text{coſ.}\, n\, \varphi}{(n+\alpha)^2}$ nicht angegeben werden. Die arithmetiſche Progreſſion zu erforſchen, nach welcher die Bögen fortgehen müſſen, damit die Summe der Reihen ſich angeben laſſe, dazu dient folgendes. Man drücke den n_{ten} Bogen allgemein durch $(a\,n+b)\,\varphi$ aus, ſo wird für zween Factoren im Nenner $\Sigma \frac{\text{coſ.}\,(a\,n+b)\,\varphi}{n^2\,(n+\alpha)^2}$

$$= \frac{1}{\alpha^2} . \Sigma \frac{\text{coſ.}\,(a\,n+b)\,\varphi}{n^2} - \frac{2}{\alpha^3} . \Sigma \frac{\text{coſ.}\,(a\,n+b)\,\varphi}{n}$$

$$+ \frac{1}{\alpha^3} . \Sigma \frac{\text{coſ.}\,(a+b\,n)\,\varphi}{(n+\alpha)^2} + \frac{2}{\alpha^3} . \Sigma \frac{\text{coſ.}\,(a+b\,n)\,\varphi}{n+\alpha}.$$

Die Reihe welche aus dem dritten Ausdruck entſpringt, gedenke man ſich rückwärts fortgeſetzt, und verbinde ſie mit der erſten Reihe, daß diejenigen Glieder in beyden, welche einerley Nenner haben, zuſammengenommen werden, ſo wird ſich die Summe der beyden vereinigten

*) *Landen* (in den Mathematical Memoirs. London 1780. N. IV. of the ſums of ſeries) hat einige Fälle des gegenwärtigen Problems entwickelt, durch ein anderes Verfahren, was ſchon für dieſe ziemlich verwickelt wird, und nicht wohl eine allgemeine Ueberſicht geben kann.

Reihen, aus dem vorhergehenden, beſtimmen laſſen, wenn a und b ſo gewählt werden, daß coſ. $(b\,n + a)\,\varphi$ + coſ. $(b\,n - b\,\alpha + a)\,\varphi$ gleich werde m. coſ. $n\,\psi$. Die Summe der Coſinuſſe iſt bekanntlich

$$= 2\,\text{coſ.}\left(b\,n + a - \frac{b\,\alpha}{2}\right)\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\frac{b\,\alpha}{2}\,\varphi;$$

jene Bedingung findet alſo ſtatt, wenn $a = \frac{b\,\alpha}{2}$ iſt. Für dieſen Werth von α iſt auch die Summe der beyden andern, aus den einfachen Brüchen gebildeten Reihen, auf ähnliche Weiſe zuſammengenommen, bekannt: wie man leicht ſieht, wenn man die Differenz der Coſinuſſe durch ein Product aus Sinuſſen darſtellt. Dabey wird die in (II. 2.) erwieſene Summation: $\Sigma\,\frac{\text{ſin.}\,n\,\varphi}{n} = \frac{\pi - \varphi}{2}$ zum Grunde gelegt. — Kommen drey quadratiſche Faktoren im Nenner vor, ſo läßt ſich die Summe angeben, wenn $\beta = 2\,\alpha$, und $a = \frac{b\,\beta}{2}$ iſt. Das Verfahren ſtimmt mit dem nur entwickelten überein, mit dem Unterſchiede, daß hier drey Coſinuſſe mit ihren aus dem vorhergehenden leicht zu beſtimmenden Coefficienten in ein Product gebracht werden müſſen, deſſen einer Factor n nicht enthält, der andere aber = coſ. $f\,n\,\varphi$ iſt, wo f eine Conſtante bedeutet. Reihen von mehr Factoren im Nenner des allgemeinen Glieds, mit abwechſelnden Zeichen, auch wo ſtatt des erſten Factors n, $2\,n - 1$ überhaupt $g\,.\,n \pm h$ vorkommt, werden nach eben den Grundſätzen behandelt. Ich muß mich hier begnügen, die Gründe des Verfahrens im allgemeinen dargeſtellt zu

haben, da die Entwicklung der einzelnen Fälle für gegenwärtige Schrift zu weitläuftig ſeyn würde.

XIV. Uebergang zu der nächſtfolgenden Unterſuchung.

1) Der Gang der bisherigen Anwendungen von gegenwärtiger Methode war dieſer. Durch Auflöſung der Coſinuſſe und Sinuſſe in ihre unendliche Progreſſionen, wurden die Reihen, vou deren Summen die Rede war, in andere verwandelt, welche nach Potenzen des Bogens φ fortgehen. Die Coefficienten-Reihen dieſer Potenzen waren ſo beſchaffen, daß ihre Summen für höhere Exponenten verſchwinden, oder, mit den Potenzen ſelbſt, andere bekannte Reihen bilden. Dort erhält man ſogleich einen endlichen Ausdruck, hier eine Reduction des Geſuchten auf etwas bekanntes. Der letzte Fall kann umgekehrt betrachtet werden: man kann nemlich Reihen, von deren Summen man aus andern Gründen unterrichtet iſt, durch dieſes Verfahren in gleichgültige verwandeln, nm dieſe dadurch zu ſummiren. Eben das läßt ſich nicht nur bey Coſinuſſen und Sinuſſen, ſondern auch bey andern Größen anbringen, welche auf ähnliche Weiſe, als jene, in unendlichen Reihen-Ausdrücken können dargeſtellt werden, z. B. bey Tangenten, Exponentialgrößen, Logarithmen u. ſ. w.

2) Dieſen Gedanken, in Rückſicht auf Reihen von Coſinuſſen und Sinuſſen, im allgemeinen zu erläutern, ſetze ich voraus, was nachher genauer ſoll erwieſen werden, daß $\Sigma \pm N.\ \text{coſ.}\ n\varphi$ und $\Sigma \pm N.\ \text{ſin.}\ n\varphi$ immer durch einen endlichen Ausdruck können angegeben

werden, wenn N eine ganze Function von n iſt. Durch die nur erwähnte Verwandlung erhält man ſtatt dieſer Reihen andere, welche nach Potenzen von φ fortgehen, deren Coefficienten von der Form: $\Sigma \pm$ N ſind. Man kann dieſes noch ſo erweitern, daß in das allgemeine Glied die n^{te} Potenz einer willkürlichen Größe x komme: auch unter dieſer umfaſſenderen Geſtalt laſſen ſich die Summen der Reihen angeben, und es kommt bey jener Verwandlung nur darauf an, $\Sigma \pm x^n$ N gehörig zu beſtimmen.

3) Im vorhergehenden wurden dieſe zween Sätze zum Grunde gelegt: $\Sigma \pm n^{2m} = 0$; $\Sigma \pm (2n-1)^{2m-1} = 0$. Die erſte Summation lehrt **Euler**, auch daß für für ungerade Exponenten $\Sigma \pm n^{2m-1}$ gleich ſey

$$\pm \frac{2^{2m}-1}{2m} \cdot \mathfrak{A}^{M}$$

*), wovon in (XII. 5.) iſt Gebrauch gemacht worden. Die Art zu ſchließen, deren er ſich dabey bedient, bezweifelt einer der einſichtsvollſten neuern Analyſten, **Greg. Fontana**. Dieſer wählt daher einen andern Weg, $\Sigma \pm n^r$ für jedes ganze r zu finden: auf welchem aber, wie es mir vorkommt, die Unterſuchung nicht ſo vollendet wird, als zu wünſchen wäre, und zu gegenwärtigem Zwecke erforderlich iſt **).

Es

*) Inſtit. Calc. Diff. P. II. Cap. VII. p. 501.

**) Fontana ſucht $\Sigma \pm x^n . n^r$ durch fortgeſetzte Differentiationen der Reihe $1 - x + x^2 -$ &c., wobey die Reihe immer wieder mit x multiplicirt werden muß (ſo verfährt Euler I. (D. P. II. p. 305.) bey einer ähnlichen Veranlaſſung). Dann wird $x = 1$ geſetzt. Da aber das Geſetz des Fortſchritts dieſer allgemeineren Summen nicht angegeben iſt, auch zu verwickelt ſeyn möchte, als daß es durch bloße Differentiation könnte gefunden werden, ſo ſcheint mir dieſer Beweis nicht völlig genugthuend. Der andere Beweis gründeá ſich auf fortgeſetzte Dif-

Es wird daher nicht überflüßig ſeyn, aus zuverläßigen und genuinen Gründen allgemeine Betrachtnngen über Summen ſolcher Reihen anzuſtellen (aus welchen auch jene Sätze als Folgerungen fließen), und ihren Zuſammenhang mit den **Bernoulliſchen Zahlen** *) darzulegen, durch welche bekanntlich Summen endlicher Reihen von eben der Art ausgedrückt werden. Darauf muß, aus den angezeigten Gründen, eine andere Unterſuchung folgen, über dieſelben Reihen, mit Coſinuſſen und Sinuſſen vielfacher Bögen, auch mit Potenzen von x verbunden.

XV. Allgemeiner Ausdruck für $\Sigma \pm x^n N$, insbeſondere auch wenn $x = 1$ iſt.

1) Da N eine ganze Function von n iſt, ſo werden die Coefficienten der Potenzen von x in der hier zu unter-

ferentiation der Reihe, deren allgemeines Glied $\pm$ coſ. $n\,\varphi$ oder $\pm$ ſin. $n\,\varphi$ iſt; wodurch er den Fall $r = 1$ des in (IX 3.) gefundenen Satzes erweiſt. So iſt für gerade r die Aufgabe gehörig aufgelöſt; aber für ungerade r erhält man keinen allgemeinen Ausdruck, und kommt alſo auf dieſem Wege nicht einmal ſo weit, als Euler gewiſſermaßen von ſeinem errathenden Scharfſinne geleitet wurde. (P. *Gregor Fontana*, ſopra le ſerie: Memorie di Verona 1784. Tom. II. P. I. p. 422.)

*) Jacob Bernoulli (Ars Conject. P. II. p. 97.) hat zuerſt dieſe Zahlen, bey der Summirung der Poteſtäten natürlicher Zahlen gebraucht: aber nur die zehen erſten angegeben, auch das allgemeine Geſetz ihres Fortgangs nicht beſtimmt. Dieß hat *Moivre* zuerſt bemerkt (Miſcell. Analyt. Suppl. p. 9): und Euler einfacher, auch zur wirklichen Berechnung, die er ſelbſt, bis zur dreyßigſten geführt hat, bequemer dargeſtellt, und gehörig erwieſen; eben derſelbe hat den Zuſammenhang dieſer Zahlen mit den Summen der reciproken Reihen, und ihren vielfachen, ausgebreiteten Nutzen in der Anaiyſis, beſonders in der Lehre von den Reihen, gezeigt: daß ſie daher mit gröſſerem Rechte Eulers Namen führen könnten, wenn ſein Ruhm und ſeine Verdienſte eines ſolchen Zuwachſes bedürften.

ſuchenden Reihe, endlich auf beſtändige oder verſchwindende Differenzen führen. Man bezeichne dieſe Coefficienten alle mit dem Buchſtaben a, und unterſcheide ſie durch den Index an der Spitze, daß der erſte $= a^I$, der n^{te} oder N, das allgemeine Glied $= a^N$ werde. Dieß vorausgeſetzt, iſt folgende Summation bekannt:

$$\Sigma . a^N x^n = \frac{x}{1-x} . a^I + \frac{x^2}{(1-x)^2} . \Delta . a^I$$
$$+ \frac{x^3}{(1-x)^3} \Delta^2 . a^I + \&c. \ldots .$$

Setzt man hier vor x, $-x$, ſo erhält man $\Sigma \pm a^N x^n$. Es kommt alſo nur darauf an, jenen endlichen Ausdruck in einen andern zu verwandeln, der zu gegenwärtiger Unterſuchung dienlicher iſt, beſonders für $x = 1$, die Summe durch die Bernoulliſchen Zahlen darſtellt. Dazu führen folgende Bemerkungen:

2) Für die Summe der endlichen Reihe:
$a^I x + a^{II} x^2 + a^{III} x^3 + \ldots + a^N x^n = S . a^N x^n$ hat Euler folgenden Ausdruck erwieſen *): $S\, a^N x^n$

$$= \frac{x^{n+1}}{x-1}\left(a^N - \alpha . \frac{d\,a^N}{dn} + \beta . \frac{d^2\,a^N}{dn^2} - \gamma . \frac{d^2\,a^N}{dn^3} + \&c.\right)$$

$+ C$. Die Coefficienten α, β, γ u. ſ. w. werden durch x beſtimmt, in ihnen kommt n nicht vor: ſie ſind in Rückſicht auf dieſe veränderliche Größe als beſtändige anzuſehen. Die Conſtans C, ſagt Euler, müſſe ſo beſtimmt werden, daß die Summe für $n = 0$ verſchwinde, wie begreiflich iſt. Durch nachfolgendes Verfahren erhält man

*) J. C. D. P. II. Cap. VII. p. 483. Die Buchſtaben ſind ſo verändert, daß die dortigen p, x, Z; hier x, n, a^N heißen.

eben dieſen Ausdruck für $S . a^N x^n$, mit dem Unterſchiede, daß ſich zugleich ein allgemeiner Ausdruck für die Conſtante ergibt, woraus dann, wie ſogleich erhellen wird, die Auflöſung des Problems folgt, von welchem hier die Rede iſt.

3) Die endliche Reihe in (2), deren letztes Glied $a^N x^n$ iſt, kann als der Unterſchied zwoer unendlichen Reihen angeſehen werden, deren eine die in (1) angegebene iſt, die andere wird $= a^N x^n + a^{N+I} x^{n+1} + a^{N+II} x^{n+2} + \&c. \ldots$; zu dieſem Unterſchiede muß noch $a^N x^n$ beygefügt werden. Die zwote Reihe iſt von eben der Art als die erſte, (ihre Coefficienten führen auch auf verſchwindende Differenzen), und ihre Summe läßt ſich demnach auf ähnliche Weiſe ausdrücken. Dieſe iſt nemlich =

$$= x^{n-1} \left\{ \frac{x}{1-x} . a^N + \frac{x^2}{(1-x)^2} . \Delta a^N + \frac{x^3}{(1-x)^3} . \Delta^2 a^N + \&c. \right\}$$

Dieſer Ausdruck von dem in (2) abgezogen, und dazu $a^N x^n$ addirt, gibt $S . a^N x^n$. Nun laſſen ſich die endlichen Differenzen von jeder Ordnung durch die verſchwindende, d. i. durch Differential-Verhältniſſe ausdrücke. So iſt:

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{1.2.dx^2} + \frac{d^3 y}{1.2.3.dx^3} + \ldots;$$

$$\Delta^2 y = \frac{(2^2 - 2.1) d^2 y}{1.2.dx^2} + \frac{(2^3 - 2.1) d^3 y}{1.2.3.dx^3} + \frac{(2^4 - 2.1) d^4 y}{1..4.dx^4} + \ldots$$

Auf ähnliche Weiſe laſſen ſich die höhern endlichen Differenzen einer Function y von x darſtellen *). Bey gegenwärtiger Anwendung iſt $y = a^N$, $x = n$. Dieſe Werthe nun ſubſtituirt geben für $S . a^N x^n$ einen Ausdruck von folgender Geſtalt: (wenn man nemlich die Größen, welche zu einerley Differential von a^N gehören, zuſammennimmt, und als Coefficienten deſſelben betrachtet, auch den allen gemeinſchaftlichen Factor $\frac{x^{n+1}}{x-1}$ beſonders bemerkt)

$$S . a^N x^n = \frac{x}{1-x} . a^I + \frac{x^2}{(1-x)^2} . \Delta a^I + \frac{x^3}{(1-x)^3} . \Delta^2 a^I + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{x^{n+1}}{x-1} \left\{ a^N - \alpha^I . \frac{d\, a^N}{d\, n} + \alpha^{II} \frac{d^2 a^N}{d\, n^2} - \alpha^{III} \frac{d^3 a^N}{d\, n^3} + \ldots\ldots \right\}$$

Die Coefficienten α^I, α^{II}, α^{III} ... ergeben ſich durch nachſtehende Gleichungen:

$$\alpha^I = \frac{1}{x-1};\ \alpha^{II} = \frac{x+1}{1 . 2 (x-1)^2};$$
$$\alpha^{III} = \frac{x^2 + 4x + 1}{1 . 2 . 3 . (x-1)^3} \text{ u. ſ. w.}$$

Einen allgemeinen Ausdruck könnte man leicht angeben, weil ein ſolcher für die endlichen Differenzen bekannt iſt. Man wird aber ſchon bey dieſen drey erſten Coefficienten

*) *Euler.* Inſt. C. D. Cap. III. De inventione differentiarum finitarum, p. 340.

bemerken, daß ſie mit denen einerley ſind, welche **Euler** mit den Buchſtaben α, β, γ u. ſ. w. bezeichnet *): er hat auch das Geſetz ihres Fortgangs in gehöriger Allgemeinheit einfach dargeſtellt. — So iſt mithin der hier gefundene Ausdruck der Summe dem **Euleriſchen** gleichgültig, bis auf die erſte zuſammengeſetzte Größe, in welcher n gar nicht vorkommt: dieſe muß demnach der erwähnten Conſtante gleich ſeyn; oder man hat C (in 2)

$$= \frac{x}{1-x} . a^{I} + \frac{x^2}{(1-x)^2} \Delta . a^{I} + \frac{x^3}{(1-x)^3} . \Delta^2 a^{I} + ..$$

4) Verbunden mit (1) gibt dieſer Satz den andern: $C = \Sigma\, a^N x^n$, oder die Summe der **unendlichen** Reihe, deren allgemeines Glied $a^N x^n$ iſt, wird $= C$. Setzt man alſo in dem Ausdrucke der Summe in (2) $n = 0$, ſo muß ſeyn: $\Sigma\, a^N x^n =$

$$- \frac{x}{x-1}\left(a^N - \alpha^{I} \frac{d\, a^N}{d\, n} + \alpha^{II} \frac{d^2\, a^N}{d\, n^2} - \ldots\right)$$

Auf dieſe Weiſe hat man für die geſuchte Summe einen allgemeinen Ausdruck, welcher Particular-Werthe der Differential-Verhältniſſe von a^N für $n = 0$ enthält, und noch die Coefficienten α^{I}, α^{II}, α^{III} u. ſ. w. deren allgemeines Geſetz bekannt iſt. Dieſes Geſetz nemlich iſt nach **Eulern** folgendes **):

*) l. c. p. 486. Der allgemeine Ausdruck, den Euler hier gibt, verglichen mit dem, was von den Differenzen bekannt iſt, zeigt die Allgemeinheit der behaupteten Identität.

**) l. c. p. 484; p. 488 iſt das Geſetz anders, zur Berechnung bequemer, aber nicht ſo leicht für die Ueberſicht, ausgedrückt.

$$\alpha^{\mathrm{I}} = \frac{1}{x-1}$$

$$\alpha^{\mathrm{II}} = \frac{1}{x-1}\left(\alpha^{\mathrm{I}} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha^{\mathrm{III}} = \frac{1}{x-1}\left(\alpha^{\mathrm{II}} + \frac{\alpha^{\mathrm{I}}}{2} + \frac{1}{1.2.3}\right)$$

$$\alpha^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{x-1}\left(\alpha^{\mathrm{III}} + \frac{\alpha^{\mathrm{II}}}{2} + \frac{\alpha^{\mathrm{I}}}{1.2.3} + \frac{1}{1..4}\right)$$

&c. . . . .

5) Setzt man hier $x = -1$, ſo ergibt ſich daraus $\Sigma \pm a^{N}$. Für dieſen Fall iſt *) $\alpha^{2M} = 0$: d. i. alle Coefficienten, welche zu geraden Differentialen gehören, verſchwinden: für die, welche zu den ungeraden gehören, iſt $\alpha^{2M-I} = \mp \frac{A^{M}}{1.2.3...2m}$, wo $A^{M} = 2.(2^{2m}-1).\mathfrak{A}^{M}$; (das obere Zeichen gilt für ein ungerades m, das untere für ein gerades; $\mathfrak{A}^{M}$ bedeutet die m^{te} Bernoulliſche Zahl). Demnach entſteht

$$\Sigma \pm a^{N} = \frac{a^{N}}{2} + \frac{(2^2-1)}{1.2}\mathfrak{A}^{I}\frac{d\,a^{N}}{d\,n}$$

$$- \frac{(2^4-1)}{1..4}\mathfrak{A}^{II}\frac{d^2\,a^{N}}{d\,n^2} + \&c. \ldots$$

In den Differential-Verhältniſſen muß erwähntermaßen $n = 0$ geſetzt werden. Dieſer Ausdruck zeigt im allgemeinen den Zuſammenhang der Summe mit den Bernoulliſchen Zahlen.

*) l. c. p. 494.

6) Nun ſey $a^N = n^r$, ſo verſchwindet dieſe Größe für $n = 0$, nebſt allen ihren Differential-Verhältniſſen bis auf das r^{te}, dieſes iſt nemlich $= \frac{d^r n^r}{d n^r} = r(r-1)\ldots 1$; die folgenden verſchwinden für jedes n. Iſt alſo r gerade, ſo wird $\Sigma \pm n^r = 0$, weil in dem Ausdrucke der Summe keine ungeraden Differentiale vorkommen, oder ihre Coefficienten verſchwinden. Iſt aber r ungerade $= 2m - 1$, ſo wird

$$\Sigma \pm n^{2m-1} = \pm \frac{2^{2m} - 1}{1 \ldots 2m} . \mathfrak{A}^M . 1 . 2 \ldots 2m - 1$$

$$= \pm \mathfrak{A}^M \frac{(2^{2m} - 1)}{2m}$$

Für ein ungerades m gilt das obere, für ein gerades das untere Zeichen. Noch allgemeiner iſt, wenn die Potenzen der natürlichen Zahlen in fortſchreitende Potenzen einer willkürlichen Größe x multiplicirt ſind, $\Sigma x^n n^r = \ldots \pm \frac{x}{1-x} . \alpha^R . 1 . 2 . 3 \ldots r$, wo α^R aus (4) beſtimmt werden kann. — Auf ähnliche Weiſe erhält man die Summen der Potenzen der ungeraden Zahlen.

7) Dem allgemeinen Ausdruck für $\Sigma a^N x^n$ kann man noch folgende Geſtalt geben, welche ich hier beyfüge, weil ſie auffallend und leicht zu überſehen iſt. Die Particularwerthe der Differentialverhältniſſe in (3) laſſen ſich ſo darſtellen, daß nicht mehr auf $n = 0$ Rückſicht genommen werden darf. Es iſt nemlich $a^N = z$, für $n = 0$, $= z - n \frac{dz}{dn} + \frac{n^2}{1.2} \frac{d^2 z}{dn^2} - \&c.$; eben ſo

erhält man Ausdrücke für $\frac{\mathrm{d}\,\zeta}{\mathrm{d}\,n}$, $\frac{\mathrm{d}^2\,\zeta}{\mathrm{d}\,n^2}$ u. ſ. w. zu $n = 0$. Nimmt man was zu einerley Differential von ζ gehört zuſammen, und bezeichnet dieſe Coefficienten mie N^I, N^{II}, und ſo weiter, ſo wird: $\Sigma\, a^N x^n =$

$$= \frac{x}{1-x} \left\{ \begin{array}{l} \zeta - \frac{\mathrm{d}\,\zeta}{\mathrm{d}\,n} . N^I + \frac{\mathrm{d}^2\,\zeta}{\mathrm{d}\,n^2} . N^{II} \\ - \frac{\mathrm{d}^3\,\zeta}{\mathrm{d}\,n^3} . N^{III} + \&c. \end{array} \right\}$$

Die Coefficienten ergeben ſich folgendergeſtalt:

$$N^I = n + \alpha^I;\; N^{II} = \frac{n^2}{1.2} + n\alpha^I + \alpha^{II};\; \text{u. ſ. w.}$$

Man kann ſie bequemer ſo darſtellen: N^I iſt $= \int \mathrm{d}\,n$, das Integral ſo genommen, daß es, für $n = 0$, $= \alpha^I$ werde; $N^{II} = \int \mathrm{d}\,n \int \mathrm{d}\,n$, welches doppelte Integral, für $n = 0$, $= \alpha^{II}$ werden muß. Allgemein heiße in einer Reihe von Integralen, deren jedes alle vorhergehenden unter ſich begreift, das erſte, das einfache; das zweyte, das doppelte ..... das m^{te}, das $m$fache; ſo wird $N^M = \int \mathrm{d}\,n \int \mathrm{d}\,n \int \mathrm{d}\,n \int \mathrm{d}\,n \ldots \int \mathrm{d}\,n$, wenn jedes $q$fache Integral ſo genommen wird, daß es, für $n = 0$, $= \alpha^Q$ werde; q ſtellt hier alle Zahlen von 1 bis m vor. Dieſer Vorſtellungsart gemäß wird alſo:

$$\Sigma\, x^n \zeta = \frac{x}{1-x} \left\{ \begin{array}{l} \zeta - \frac{\mathrm{d}\,\zeta}{\mathrm{d}n} \int \mathrm{d}\,n + \frac{\mathrm{d}^2\,\zeta}{\mathrm{d}n^2} \int \mathrm{d}n \int \mathrm{d}n \\ - \frac{\mathrm{d}^3\,\zeta}{\mathrm{d}\,n^3} \int \mathrm{d}n \int \mathrm{d}n \int \mathrm{d}n + \&c. \end{array} \right\}$$

In dieſem Ausdrucke wird n als veränderlich angeſehen,

und kann alſo willkührlich genommen werden: und doch darf es nach der Entwicklung nicht mehr vorkommen. Man wird ſich dieſe anſcheinende Schwürigkeit leicht heben, wenn man das Differential der in $\frac{x}{1-x}$ multiplicirten Größe unterſucht und $= 0$ findet: daß alſo dieſelbe in Abſicht auf n eine Conſtante iſt, für jedes n einen Werth behält, d. i. n bey der Entwicklung wegfällt. — Dieſer Ausdruck dient unter andern auch als ein ſonderbares Beyſpiel der analytiſchen Charakteriſtik: er enthält den Zuſammenhang der Summe mit den Coefficienten α^{I}, α^{II} u. ſ. w., oder, für $x = -1$, mit den Bernoulliſchen Zahlen: und dieſe ſind darin unſichtbar; dagegen ſtellt er die Summe durch n und Größen, die n enthalten, dar: und doch iſt dieſelbe von n unabhängig.

XVI. Allgemeiner Ausdruck für Summen von Reihen der Sinuſſe und Coſinuſſe vielfacher Bögen, verbunden mit geometriſchen, allgebraiſchen und recurrirenden Reihen.

1) In dem allgemeinen Gliede der Reihen, deren Summen hier unterſucht werden, befindet ſich der Coſinus oder Sinus eines vielfachen von dem Bogen φ nach der n^{ten} natürlichen Zahl, eine Potenz der willkürlichen Größe x mit eben dieſer Zahl als Exponenten, und dann irgend eine ganze algebraiſche Function von n. Bekanntlich ſtellt dieſe für ſich allein das allgemeine Glied einer algebraiſchen Reihe, von jedweder endlichen Ordnung, vor, und jene Potenz eben das bey einer geometriſchen Reihe.

Man drücke, wie vorhin, die Coefficienten durch a^{I}, a^{II} u. ſ. w., den n^{ten} durch a^{N} aus, ſo wird das Problem dieſes ſeyn, $\Sigma\, x^n\, a^N \cos.\, n\,\phi$ zu finden. Die einfachſte Art, Reihen dieſer Art zu ſummiren, beruhet auf den imaginären Ausdrückungen der trigonometriſchen Linien durch Exponentialgrößen. Man ſetze alſo hier

$$\cos.\, n\,\phi = \frac{e^{n\phi\sqrt{-1}} + e^{-n\phi\sqrt{-1}}}{2}, \text{ ſo wird}$$

$$\Sigma\, x^n\, a^N \cos.\, n\,\phi = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(x\,e^{\phi\sqrt{-1}})^n\,.\,a^N + \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(x e^{-\phi\sqrt{-1}})^n\, a^N,$$

oder die geſuchte Summe aus den Summen zwoer Reihen zuſammengeſetzt, denen in (XIV. 2.) ähnlich: bey der einen iſt $x\,e^{\phi\sqrt{-1}}$, bey der andern $x\,e^{-\phi\sqrt{-1}}$, was dort x allein iſt. Jenen Ausdruck für die Summe hier angewandt, erhält man

alſo: $$2\,\Sigma\, x^n\, a^N \cos.\, n\,\phi = a^I.\,\frac{x\,e^{\phi\sqrt{-1}}}{1 - x\,e^{\phi\sqrt{-1}}} + \frac{x^2\,e^{2\phi\sqrt{-1}}}{(1 - x\,e^{\phi\sqrt{-1}})^2}\,.\,\Delta^2\, a^I + \&c.$$

$$+ a^I\,.\,\frac{x\,e^{-\phi\sqrt{-1}}}{1 - x e^{-\phi\sqrt{-1}}} + \frac{x^2\,e^{-2\phi\sqrt{-1}}}{(1 - x\,e^{-\phi\sqrt{-1}})^2}\,.\,\Delta^2 a^I$$

$+$ &c. Von dieſen beiden Partial-Ausdrückungen iſt jede für ſich unmöglich; zuſammen geben ſie eine mögliche Summe: es kommt dabey nur darauf an, ſie auf die bequemſte Geſtalt zu bringen, daß ſich das unmögliche aufhebe. Die unmöglichen Brüche, welche beiderſeits zu **einer** Potenz von x ($= x^m$) und **einer** Differenz von a^I gehören, oder $\frac{e^{m\phi\sqrt{-1}}}{(1 - x e^{\phi\sqrt{-1}})^m}$, und $\frac{e^{-m\phi\sqrt{-1}}}{(1 - x e^{-\phi\sqrt{-1}})^m}$, haben, auf einerley Benennung gebracht, einen möglichen

Nenner. Die Entwickelung der m^{ten} Potenz der Partialnenner gibt auch dem Zähler eine mögliche Geſtalt. Dieſes Verfahren iſt das natürlichſte, aber durch folgendes erhält man einen viel einfachern Ausdruck. Jene beiden Brüche laſſen ſich ſo vorſtellen: $(e - \phi \surd -1 - x)^{-m}$, $(e \phi \surd -1 - x)^{-m}$; für ihre Summe unter dieſer Geſtalt einen möglichen Ausdruck zu finden, dazu dient nachſtehender Lehnſatz.

2) Jede unmögliche Größe läßt ſich durch $A + B.\surd -1$ ausdrücken: alſo wird auch $(a + b.\surd -1)^r = A + B.\surd -1$ ſeyn müſſen. Es fragt ſich was A und B für Werthe haben. Jene Potenz iſt $= a^r\left(1 + \frac{b}{a}\surd -1\right)^r$. Nun wird für jeden Bogen ζ, $(\text{coſ.}\,\zeta + \text{ſ.}\,\zeta.\surd -1)^r = \text{coſ.}\,\zeta^r(1 + \text{ſ.}\,\zeta.\surd -1)^r = \text{coſ.}\,r\zeta + \text{ſin.}\,r\zeta.\surd -1$. Man ſetze alſo $\frac{b}{a} = \text{tang.}\,\zeta$, ſo folgt

$$(a + b\surd -1)^r = a^r\frac{(\text{coſ.}\,r\zeta + \text{ſin.}\,r\zeta.\surd -1)}{\text{coſ.}\,\zeta^r};$$

aber $\text{coſ.}\,\zeta = \frac{a}{\surd(a^2 + b^2)}$, alſo $(a + b\surd -1)^r = (a^2 + b^2)^{\frac{r}{2}}.(\text{coſ.}\,r\zeta + \text{ſin.}\,r\zeta.\surd -1)$, wo $\zeta = \text{Arc. t.}\,\frac{b}{a}$.

3) In der Anwendung auf die Größen in (1) iſt beyderſeits $a = \text{coſ.}\,\phi - x$; b, bey der einen, $= + \text{ſin.}\,\phi$, bey der andern $= - \text{ſin.}\,\phi$. Alſo wird ſich, was in

$\sqrt{-1}$ multiplicirt iſt, gegenſeitig aufheben, und ſeyn:

$$(e^{-\phi\sqrt{-1}} - x)^{-m} + (e^{\phi\sqrt{-1}} - x)^{-m} = 2\,(1 - 2\,x\,.\cos\phi + x^2)^{-\frac{m}{2}}\,.\cos m\,\zeta$$

wo der Bogen $\zeta = \text{Arc. tang.}\ \frac{\sin\phi}{x - \cos\phi}$ iſt. Dieſen Werth für $m = 1, 2, 3$ u. ſ. w. ſubſtituirt, erhält man

$$\Sigma\, x^n a^N \cos n\phi = a^1\,.\,z \cos\zeta + \Delta a^1\,.\,z^2 \cos 2\zeta + \Delta^2 a^1 z^3 \cos 3\zeta + \&c.,$$

wenn der Kürze wegen $z = \frac{x}{\sqrt{(1 - 2x\cos\phi + x^2)}}$ geſetzt wird. Man kann ϕ durch ζ ausdrücken, und ſo ergibt ſich folgende Summe, bey welcher das Geſetz des Fortſchritts noch leichter zu überſehen iſt. Man ſetze nemlich $\frac{x\,.\sin\zeta}{\sin\phi} = y$, ſo wird

$$\Sigma\, x^n a^N \cos n\phi = -\,a^1\, y \cos\zeta + \Delta a^1 y^2 \cos 2\zeta - \Delta^2 a^1 y^3 \cos 3\zeta + \&c.$$

Der bisher gebrauchten Bezeichnungsart gemäß kann man dieſe Summation auch ſo darſtellen: $\Sigma\, x^n a^N \cos n\phi = S \mp \Delta^n a^1\,.\,y^n \cos n\zeta$, wo die letzte durch S angedeutete endliche Summe von $n = 1$ bis $n = q$ genommen wird, wenn die Function a^N von der Dimenſion $= q$ iſt, daß alſo die Differenzen von einer höhern Ordnung, als q anzeigt, verſchwinden.

4) Man wird leicht bemerken, daß ſich das ganze ſeitherige Verfahren auch dann anbringen laſſe, wenn die Bögen, anſtatt vielfache nach den natürlichen Zahlen zu ſeyn, nach irgend einer andern arithmetiſchen Reihe fortgehen. Der n^{te} Bogen in der Reihe ſey $= \phi + n\,\delta$, ſo findet ſich

$\Sigma\, a^N x^n$ coſ. $(\varphi + n\,\delta) = - a^{\mathrm{I}}.y$. coſ. $(\zeta - \varphi)$ $+ \Delta\, a^{\mathrm{I}}.y^2$ coſ. $(2\,\zeta - \varphi) - \Delta^2 a^{\mathrm{I}} y^3$ coſ. $(3\,\zeta - \varphi)$ + &c., wo y und ζ die vorigen Werthe behalten, nemlich $\zeta = \text{Arc. t.} \frac{\text{ſin.}\,\delta}{x - \text{coſ.}\,\delta}$, $y = \frac{x\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\delta}$. Daraus ergibt ſich auch die Summation eben derſelben Reihe bis auf ein jedwedes n^{tes} Glied. Dieſe endliche Reihe kann nemlich als der Unterſchied zwoer unendlichen von einer Art angeſehen werden. Der abzuziehenden Reihe Summe erhält man, wenn in dem nur dargelegten Ausdrucke vor a^{I}, $a^{N+\mathrm{I}}$, und ſtatt φ, $\varphi + n\,\delta$ geſetzt wird: ζ und δ bleiben unverändert.

5) Aehnliche Reihen von Sinuſſen laſſen ſich durch eben dieſe Methode ſummiren. Man kann auch ihre Summation unmittelbar aus der nächſtvorhergehenden ableiten, wenn ſtatt des Winkels φ, ſein Complement, und δ negativ genommen wird. Daraus folgt $\Sigma\, a^N x^n$ ſ. $(\varphi + n\,\delta)$ $= - a^{\mathrm{I}}.y$ ſin. $(\zeta - \varphi) + \Delta\, a^{\mathrm{I}}.y^2$ ſin. $(2\,\zeta - \varphi)$ $- \Delta^2 a^{\mathrm{I}} y^3$ ſin. $(3\,\zeta - \varphi)$ + &c. welcher Ausdruck mit dem in (4) in allem übereinkommt, außer daß von den Bögen $\zeta - \varphi$, $2\,\zeta - \varphi$ u. ſ. w. hier die Sinuſſe genommen ſind, dort die Coſinuſſe: y und ζ haben beyderſeits gleiche Werthe.

6) Nimmt man in den bisherigen Formeln x negativ, ſo entſtehen daraus die Summen eben ſolcher Reihen mit abwechſelnden Zeichen. Es ſey $\mathfrak{D} = \text{Art. t.} \frac{\text{ſin.}\,\delta}{x + \text{coſ.}\,\delta}$, $y = \frac{x\,.\,\text{ſin.}\,\mathfrak{D}}{\text{ſin.}\,\delta}$, ſo wird $\Sigma \pm a^N x^n$ coſ. $(\varphi + n\,\delta)$

$= a^{\mathrm{I}} y \,.\, \text{coſ.}\,(\mathfrak{D} + \varphi) - \Delta\, a^{\mathrm{I}} \,.\, y^2\, \text{coſ.}\,(2\,\mathfrak{D} + \varphi)$ $+ \Delta^2\, a^{\mathrm{I}} \,.\, y^3\; \text{coſ.}\,(3\,\mathfrak{D} + \varphi) - \&c.$ Eben ſo für die Reihe mit Sinuſſen $\Sigma \pm a^N\, x^n\, \text{ſin.}\,(\varphi + n\,\delta)$ $= a^{\mathrm{I}} y \,.\, \text{ſin.}\,(\mathfrak{D} + \varphi) - \Delta\, a^{\mathrm{I}} \,.\, y^2 \,.\, \text{ſin.}\,(2\,\mathfrak{D} + \varphi)$ $+ \Delta^2\, a^{\mathrm{I}} y^3\, \text{ſin.}\,(3\,\mathfrak{D} + \varphi) - \&c.$

7) Für den Fall $x = 1$ wird in (4) und (5) $\text{tang.}\,\zeta = \dfrac{\text{ſin.}\,\delta}{1 - \text{coſ.}\,\delta}$, alſo $\zeta = \dfrac{\pi - \delta}{2}$, und $y = \dfrac{1}{2} \,.\, \text{coſec.}\,\dfrac{\delta}{2}$. Daraus folgt $\Sigma\, a^N \,.\, \text{coſ.}\,(\varphi + n\delta)$ $= - a^{\mathrm{I}} y \,.\, \text{ſin.}\left(\dfrac{\delta}{2} + \varphi\right) - \Delta\, a^{\mathrm{I}} y^2 \,.\, \text{coſ.}\,(\delta + \varphi)$ $+ \Delta^2\, a^{\mathrm{I}} y^3 \,.\, \text{ſin.}\,(\tfrac{3}{2}\delta + \varphi) + \Delta^3\, a^{\mathrm{I}} y^4\, \text{coſ.}\,(2\delta + \varphi)$ $- \&c.$, in welchem Ausdrucke wechſelsweiſe Sinuſſe und Coſinuſſe von Bögen vgrkommen, welche zum beſtändigen Unterſchiede $\dfrac{\delta}{2}$ haben, und deren erſter $\dfrac{\delta}{2} + \varphi$ iſt. Wie die Zeichen abwechſeln iſt ſichtbar. Für die Summe der Reihe mit Sinuſſen erhält man einen ähnlichen Ausdruck, oder vielmehr völlig denſelben, wenn man bey den nur erwähnten Bogen Sinuſſe und Coſinuſſe verwechſelt. — Setzt man in (6) $x = 1$, ſo wird $\mathfrak{D} = \dfrac{\delta}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}\, \text{ſec.}\,\dfrac{\delta}{2}$: alſo $\Sigma \pm a^N\, \text{coſ.}\,(\varphi + n\,\delta)$ $= a^{\mathrm{I}}\, y \,.\, \text{coſ.}\left(\dfrac{\delta}{2} + \varphi\right) - \Delta\, a^{\mathrm{I}} \,.\, y^2\, \text{coſ.}\,(\delta + \varphi)$ $+ \Delta^2\, a^{\mathrm{I}} y^3\, \text{coſ.}\,(\tfrac{3}{2}\delta + \varphi) - \&c.$ Wegen der Reihe von Sinuſſen gilt die gleiche Bemerkung. — Wie ferner

daraus die Summen eben ſolcher endlichen Reihen gefunden werden, bedarf keiner weitern Entwicklung (4).

8) Anſtatt daß ſeither in der Reihe, deren allgemeines Glied $a^N x^n$ coſ. $n\,\varphi$ iſt, die Coefficienten a^{I}, a^{II}, a^{III} u. ſ. w. nach einer algebraiſchen Progreſſion fortgiengen, nehme man für dieſelben, Glieder einer **recurrirenden Reihe**, von irgend einer Ordnung m: die **Verhältniß-Skale** werde durch folgende Gleichung ausgedrückt: $\alpha \,.\, a^N + \alpha^{\mathrm{I}} \,.\, a^{N-\mathrm{I}} + \alpha^{\mathrm{II}} \,.\, a^{N-\mathrm{II}} \ldots + \alpha^M \,.\, a^{N-M} = 0$, (wobey a^N das n^{te} Glied der Coefficientenreihe bedeutet). Man ſetze, der Kürze wegen, den Ausdruck $\alpha + \alpha^{\mathrm{I}} x$ coſ. $\varphi + \ldots\ldots + \alpha^M x^m$ coſ. $m\varphi = P$; mit ſin. φ, ſin. 2 φ, ſin. 3 φ &c. mutiplicirt gebe er Π^{I}, Π^{II}, Π^{III}; $\frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,\varphi}$, $\frac{\mathrm{d}\,\Pi^{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}\,\varphi}$, $\frac{\mathrm{d}\,\Pi^{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}\,\varphi}$ u. ſ. w. bedeuten die Differential-Verhältniſſe dieſer Größen, bloß φ als veränderlich angenommen. Dieſes vorausgeſetzt, wird die Summe der Reihe, oder $\Sigma\, a^N x^n$ coſ. $n\,\varphi$, einem Bruche gleich, deſſen Nenner $= P^2 + \frac{\mathrm{d}\,P^2}{\mathrm{d}\,\varphi^2}$ iſt, der Zähler iſt

$$= \alpha \,.\, a^{\mathrm{I}} \,.\, x \,\frac{\mathrm{d}\,\Pi^{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}\,\varphi} + (\alpha \,.\, a^{\mathrm{II}} + \alpha^{\mathrm{I}} \,.\, a^{\mathrm{I}})\, x^2 \,\frac{\mathrm{d}\,\Pi^{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}\,\varphi}$$

$$+ (\alpha\, a^{\mathrm{III}} + \alpha^{\mathrm{I}}\, a^{\mathrm{II}} + \alpha^{\mathrm{II}}\, a^{\mathrm{I}})\, x^3 \,\frac{\mathrm{d}\,\Pi^{\mathrm{III}}}{\mathrm{d}\,\varphi} + \&c.$$

Das Geſetz des Fortgangs bey dieſem Ausdrucke iſt auffallend: er hört mit dem m^{ten} Gliede auf, welches = iſt

$$(\alpha\, a^M + \alpha^{\mathrm{I}}\, a^{M-\mathrm{I}} \ldots + \alpha^{M-\mathrm{I}}\, a^{\mathrm{I}})\, x^m \,\frac{\mathrm{d}\,\Pi^M}{\mathrm{d}\,\varphi}.$$

Auf ähnliche Weiſe findet man die Summe der Reihe, in welcher Sinuſſe vorkommen. Auch können die Bögen jedwede arithmetiſche Progreſſion ausmachen. — Setzt man in der nur gefundenen Formel $\varphi = 0$, ſo wird $\frac{dP}{d\varphi} = 0$, $\frac{d.\Pi^M}{d\varphi} = mP$: und ſo liegt darin die Summation der recurrirenden Reihen in ihrer allgemeinen Geſtalt, wie ſie auch ſonſt bekannt iſt. Diejenige Darſtelſtellung allgemeiner Ausdrücke iſt immer die vortheilhafteſte, bey welcher man die beſondern Fälle am leichteſten überſehen und entwickeln kann. So ſind auch die vorhergehenden Formeln beſchaffen *).

mmmm

*) Mit der Unterſuchung von Reihen mit Coſinuſſen und Sinuſſen haben ſich faſt zu gleicher Zeit mehrere Analyſten beſchäftiget: Daniel Bernoulli, Lexell (Nov. Comment. Petrop. T. XVI. XVIII), Euler (Tom. XVIII auch Introd. in Analyſ. Infin. P. I. Cap. XIV), Boſſut (Mem. de Paris 1769); nachmals auch Lorgna (Memorie della Societa Italiana Tom. I) und Fontana (Tom. II. P. I). Formeln für die Aufgabe, in der Allgemeinheit, in welcher ich ſie hier vorgetragen habe, findet man bey dieſen Schriftſtellern nicht entwickelt. So ſucht Fontana, in der Abſicht, die Unterſuchungen ſeiner Vorgänger zu erweitern, die Summe zwoer Reihen, deren allgemeines Glied, nach der gegenwärtigen Bezeichnungsart, $(a + bn).\text{coſ.}(a + bn)\phi$, oder $(a + bn)\ \text{ſin.}(a + bn)\phi$ iſt. Auch zeigt er im allgemeinen an, wie durch fortgeſetzte Differentiation die Summen gefunden werden, wenn der allgemeine Coefficient $(a + bn)^m$ iſt. Man ſieht leicht, daß dieſe Betrachtung nicht allgemein genug iſt, und auch für die Fälle, welche ſie umfaßt, die Formeln nicht ihre einfachſte Geſtalt, auf dieſem Wege, erhalten würden. — Was Potenzen von Coſinuſſen und Sinuſſen betrift, ſo werden ſie entweder nach den oben in (VI.) angegebenen Formeln behandelt, oder man legt dabey den in (VIII.) erwieſenen Satz zum Grunde, daß ſie recurrirende Reihen höherer Ordnungen bilden. — Als Beyſpiele dienen die ſchon im vorhergehenden erwieſene Summationen dieſer Art.

XVII. Reihen für die Tangente und Sekante. Bemerkungen darüber; auch über $\Sigma \pm (2n-1)^r$.

1) Wenn man in den allgemeinen Formeln des vorhergehenden §. . $\varphi = 0$ und $a^N = 1$ ſetzt, ſo erhält man:

$$\Sigma \pm \text{coſ.}\ n\,\delta = \tfrac{1}{2}\ \text{ſec.}\ \frac{\delta}{2}\ .\ \text{coſ.}\ \frac{\delta}{2} = \tfrac{1}{2};\ \text{und}$$

$$\Sigma \pm \text{ſin.}\ n\,\delta = \tfrac{1}{2}\ \text{ſec.}\ \frac{\delta}{2}\ .\ \text{ſin.}\ \frac{\delta}{2} = \tfrac{1}{2}\ \text{tang.}\ \frac{\delta}{2}.$$

Die Anwendung des in (XIV.) überhaupt angezeigten Verfahrens auf die letztere Reihe gibt alſo einen Reihen-Ausdruck für die **Tangente**. Es iſt nemlich $\Sigma \pm \text{ſin.}\ n\,\delta$ $= \delta\ .\ \Sigma \pm n - \frac{\delta^3}{1.2.3}\ \Sigma \pm n^3 + \frac{\delta^5}{1..5}\ .\ \Sigma \pm n^4$ — &c. Drückt man nun, nach (XV.), die hier vorkommenden Summen durch die Bernoulliſche Zahlen aus, ſo wird, $\frac{\delta}{2} = x$ geſetzt: $\text{tang.}\ x = 2^2\,\frac{(2^2-1)}{1\,.\,2}\,\mathfrak{A}\,x$ $+ \frac{2^4\,(2^4-1)}{1\,.\,.\,4}\,\mathfrak{B}\,x^3 + \frac{2^6\,(2^6-1)}{1\,.\,.\,6}\,\mathfrak{C}\,x^5 + \&c.,$ bey welcher Reihe das Geſetz des Fortgangs leicht zu überſehen iſt: wie jene Zahlen, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ u. ſ. w. fortſchreiten, iſt bekannt genug. — Daraus ergibt ſich für die **Cotangente** folgende Progreſſion: $\text{cot.}\ x = \frac{1}{x} - \frac{2^2\,\mathfrak{A}\,x}{1\,.\,2}$ $- \frac{2^4\,\mathfrak{B}\,x^3}{1\,.\,.\,.\,4} - \frac{2^6\,\mathfrak{C}\,x^5}{1\,.\,.\,.\,6}$; wie man durch Diviſion

findet, oder noch bequemer, indem man die Form der Reihe annimmt, und zur Beſtimmung der Coefficienten, die Gleichung: tang. $x =$ cot. $x -$ 2 cot. 2 x, mit Zuziehung der nur erwieſenen Reihe für die Tangente, gebraucht.

2) Dieſe Reihen kommen bey den Schriftſtellern über die höhere Analyſis ſelten vollſtändig entwickelt vor *), weil das Geſetz der Coefficienten nicht ſo auffallend iſt, als bey den Reihen für Coſinuſſe und Sinuſſe. Sonſt läßt ſich dieſes Geſetz auf mehr als eine Art auch aus den erſten Gründen ableiten. So iſt cot. $x = \frac{\text{coſ. } x}{\text{ſin. } x}$. Löſt man nun den Coſinus und Sinus in ihre unendliche Progreſſionen auf, ſo entſteht durch Diviſion eine Reihe, welche bekanntlich zu den recurrirenden Reihen gehört. Iſt demnach cot. $x = \frac{1}{x}(1 + a^{I}x^{2} + a^{II}x^{4} + a^{III}x^{6} + \&c.)$ ſo wird jeder Coefficient a^{N} durch alle vorhergehenden vermittelſt folgender Gleichung beſtimmt: $0 = a^{N} - \frac{a^{N-I}}{1.2.3} + \frac{a^{N-II}}{1\ldots5} - \&c. \mp \frac{a^{I}}{1\ldots.2n-1} \mp \frac{2n}{1\ldots2n+1}$. Verglichen mit dem was oben in (III. 4.) iſt erwähnt worden, zeigt dieſe Gleichung, daß $a^{N} = -\frac{2^{2n}}{1.2.3..2n}.\mathfrak{A}^{N}$ ſey, wenn $\mathfrak{A}^{N}$ die n^{te} Bernoulliſche Zahl andeutet. — Eine andere bequeme Art, die Reihe für die Cotangente zu finden, gibt die

*) Euler hat ſie (Inſt. Calc. Diff. Cap. V, p. 424) aus andern Gründen abgeleitet.

Integration an die Hand. Es iſt nemlich cot. $x = - ſ. \frac{dx}{ſin.\ x^2} = - 2\ ſ. \frac{dx}{1 - coſ.\ 2x}$: der in d$x$ multiplicirte Bruch läßt ſich gleichfalls in eine recurrirende Reihe entwickeln, welche mit dx multiplicirt und gehörig integrirt $- \frac{1}{2}$ cot. x gibt. Daraus folgt dasſelbe Reſultat. — Aus der Reihe für die Cotangente ergibt ſich die andere für die Tangente unmittelbar, weil tang. $x =$ cot. $x - 2$ cot. $2x$ iſt.

2) Legt man dieſes Verfahren, jene Reihen zu finden, zum Grunde, ſo entſteht daraus vermittelſt der Verwandlung in (1) ein neuer Beweis für den oben ſchon erwieſenen Ausdruck der Summe $\Sigma \pm n^{2m-1}$. Eben ſo läßt ſich durch dieſe Art zu ſchließen, darthun, daß $\Sigma \pm n^{2m} = 0$ ſey. Es iſt nemlich (in XVI. vor φ, $-\varphi$, und vor δ, 2φ geſetzt) coſ. φ — coſ. 2φ + coſ. 3φ — coſ. 4φ + &c $= \Sigma \pm$ coſ. $n\varphi = \frac{1}{2}$. Daraus wird, durch Auflöſung der Coſinuſſe in ihre Reihen, $\Sigma \pm n - \frac{\varphi^2}{1.2} \Sigma \pm n^2 + \frac{\varphi^4}{1..4} \Sigma \pm n^4$ — &c. $= \frac{1}{2}$. Da dieſe Gleichung für jedes φ gilt, ſo müſſen die Summen der Coefficienten-Reihen verſchwinden, bis auf $\Sigma \pm n = \frac{1}{2}$. — Obgleich dieſe Beweisart ganz einfach iſt, ſo ſchien es mir doch nicht überflüßig, im vorhergehenden, eben dieſe Sätze als Folgerungen aus allgemeineren Betrachtungen darzuſtellen. Eben dieſe Betrachtungen geben zwar auch Ausdrücke für $\Sigma \pm (2n - 1)^r$, bey geraden und ungeraden r: aber es läßt ſich daraus nicht ohne einige Weitläufigkeit darthun, daß im zweyten Falle die Summe jedesmal ver-

ſchwinde, und welchem Geſetze ſie im erſten folge. Beydes zu überſehen, ſind Schlüſſe von der Art, wie ſie hier geführt worden ſind, ſehr dienlich: dieß wird aus dem nachfolgenden ſogleich erhellen.

4) Für die Sekante eine Reihe zu finden, verfährt man auf ähnliche Art wie in (1). Es iſt nemlich

$$\text{ſec.}\ \varphi = \frac{1}{\text{coſ.}\ \varphi} = \frac{1}{1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1..4} - \&c.}$$

Dieſer Bruch entwickelt, gibt eine recurrirende Reihe: $a + a^{\text{I}}\varphi^2 + a^{\text{II}}\varphi^4 + a^{\text{III}}\varphi^6 + \&c.$; der Nenner zeigt die Verhältniß-Skale, und daraus entſteht für die Coefficienten folgende Gleichung:

$$a^N - \frac{1}{1.2} a^{N-\text{I}} + \frac{1}{1.2.3.4} a^{N-\text{II}} - \frac{1}{1..6} a^{N-\text{III}} + \&c. \pm \frac{a}{1.2.3...2m}.$$

Dieſes Geſetz verglichen mit demjenigen, welches in (X. 4) für die Summen der reciproken Reihen von Potenzen ungerader Zahlen mit abwechſelnden Zeichen iſt erwieſen worden, zeigt daß

$$\Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m+1}} = \frac{\pi^{2m+1}}{2^{2m+2}} \cdot a^M.$$

So ſind alſo die Zahlen a, a^{I}, a^{II} &c. in Rückſicht auf dieſe Reihen, eben das, was die Bernoulliſchen Zahlen für die reciproke Reihen von Potenzen der natürlichen Zahlen, oder für $\Sigma \frac{1}{n^{2m}}$, und für die Tangenten-Reihe

ſind. Man nenne für jedes q, $a^Q = \frac{\alpha^Q}{1.2.3\ldots 2q}$ ſo erhält man neue Zahlen α, α^{I}, α^{II} u. ſ. w., welche **Euler** bis auf die 10te berechnet hat (Inſtit. Calc. Diff. C. VIII. p. 542). Dieſe zum Grunde gelegt wird alſo:

$$\text{ſec. } x = \alpha + \frac{\alpha^{I} x^2}{1.2} + \frac{\alpha^{II} x^4}{1.2.3.4} + \frac{\alpha^{III} x^6}{1\ldots 6} + \&c.$$

$$\Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m+1}} = \frac{\alpha^M}{1.2.3..2m} \cdot \frac{\pi^{2m+1}}{2^{2m+2}}.$$

5) Setzt man in dem allgemeinen Ausdrucke für $\Sigma \pm a^N$ ſin. $(\varphi + n\delta)$ (XVI. 6.) vor φ, $-\varphi$, und ſtatt δ, $\frac{\varphi}{2}$, ſo folgt daraus nachſtehende Summation:

$$\text{ſin. } \varphi - \text{ſin. } 3\varphi + \text{ſin. } 5\varphi - \text{ſin. } 7\varphi + \&c. = 0.$$

Dieſe Reihe nach der bisherigen Art behandelt, verändert ſich in dieſe:

$$\varphi \cdot \Sigma \pm (2n-1) - \frac{\varphi^3}{1.2.3} \cdot \Sigma \pm (2n-1)^3$$
$$+ \frac{\varphi^5}{1..5} \Sigma \pm (2n-1)^5 - \&c.$$

Da dieſer Ausdruck für jedes φ verſchwinden muß, ſo folgt daraus: $\Sigma \pm (2n-1)^{2m-1} = 0$, ein neuer einfacher Beweis für dieſen ſchon im vorhergehenden gefundenen Satz. — Die vorigen Werthe von δ und φ in $\Sigma \pm a^N$ ſin. $(\varphi + n\delta)$ geſetzt, geben für die Sekante folgenden Reihen-Ausdruck:

$$\tfrac{1}{2} \text{ ſec. } \varphi = \text{coſ. } \varphi - \text{coſ. } 3\varphi + \text{coſ. } 5\varphi$$
$$- \text{coſ. } 7\varphi + \&c.$$

Daraus wird durch ähnliche Verwandlungen: sec. $\varphi = 1$

$$- \frac{2\varphi^2}{1.2} \Sigma \pm (2n-1)^2 + \frac{2\varphi^4}{1.2.3.4} . \Sigma \pm (2n-1)^4$$

— &c. Dieſe Reihe verglichen mit der in (4) erwieſenen zeigt, daß $\Sigma \pm (2n-1)^{2m} = \pm \frac{1}{2} \alpha^M$, wobey das untere Zeichen für ein ungerades, das obere für ein gerades m gilt. So erhellt alſo, daß auf eine ſehr einfache Art die Summe folgender unendlichen Reihe: $1 - 3^{2m} + 5^{2m} - 7^{2m} + \&c.$, durch die Zahlen α, α^{I}, α^{II} u. ſ. w. jedesmal beſtimmt werden könne. Darin zeigt ſich eine nicht ganz unmerkwürdige, und ſoviel ich weiß, noch nicht vollſtändig bemerkte **Analogie** zwiſchen den Reihen von Potenzen, einerſeits der natürlichen, und dann der ungeraden Zahlen, beyderſeits mit abwechſelnden Zeichen. Es iſt bekannt, auch im vorhergehenden gehörig erwieſen, daß bey der erſten Art von Reihen die Summe für bejahte gerade Exponenten verſchwinde, für eben ſolche ungerade durch die Bernoulliſchen Zahlen beſtimmt werde, und für verneinte gerade durch eben dieſe Zahlen und Potenzen von π. **Dieſe drey Sätze laſſen ſich auch bey der andern Art von Reihen anbringen**, wenn man nur, ſo wie ſie hier ausgedrückt ſind, gerad und ungerad bey den Exponenten verwechſelt, und ſtatt der Bernoulliſchen Zahlen die denſelben entſprechende (4) α, α^{I}, α^{II} u. ſ. w. nimmt.

6) Die Reihe für die **Coſecante** findet man auf gleiche Weiſe, wie die für die Secante, durch bloße Diviſion: es ſey nemlich

$$\text{coſec.}\,\varphi = \frac{1}{\text{ſin.}\,\varphi} = \frac{1}{\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1\ldots5}} =$$

$$= \frac{1}{\varphi} + a^{I}\varphi + a^{II}\varphi^3 + \&c.$$

ſo wird das Verhältniß der Coefficienten dieſer recurrirenden Reihe durch folgende Gleichung beſtimmt:

$$a^N - \frac{a^{N-I}}{1.2.3} + \frac{a^{N-II}}{1\ldots5} - \&c. \pm \frac{1}{1.2.3\ldots2n+1}$$

Daraus erhellt, verbunden mit (III. 3. und 4.), daß

$$a^N = 2.\pi^{-2n}\Sigma \pm \frac{1}{2^{2n}} = 2\frac{(2^{2n-1}-1)\mathfrak{A}^N}{1.2.3\ldots2n}.$$

Unmittelbar läßt ſich auch die Reihe für die Coſekante aus der für die Cotangente ableiten, weil coſec. φ $=$ cot. $\frac{1}{2}\varphi$ — cot. φ *).

7) Man könnte auf den Gedanken gerathen, ob nicht etwa die Reihe für die Tangente auf eine ähnliche Weiſe, wie die für den Sinus, in ein Product aus unendlich vielen Factoren könne aufgelöſet werden. In der That, wenn man die Gründe lieſt, aus welchen die meiſten Schriftſteller **) jenen Ausdruck für den Sinus erweiſen, ſollte man faſt verſucht werden, eben dieſelben wörtlich und unverändert auf die Tangente überzutragen. Es hat

*) Vergl. *Euler* Inſt. C. D. p. 541.

**) Auch die vorzüglichſten unter den neuern Schriftſtellern über die höhere Analyſis, z. B. Herr Obriſtlieutenant von Tempelhoff (Analyſ. d. Unendl. S. 478), *Ed. Waring* (Medit. Analyt. p. 617), u. a. — Joh. Bernoulli, der Erfinder des Satzes, hat ſich ſelbſt Zweifel dagegen gemacht: dieſe hat Herr Hofrath Käſtner gehoben (Anal. d. Unendl. §. 338. u. ſ. w.)

keinen Zweifel, daß tang. x dann immer und nur dann verſchwinde, wenn ſin. $x = 0$ wird, alſo für $x = 0$, $= \pm \pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$ u. ſ. w.: warum ſollte ſie nicht eben ſo wie der Sinus, durch das Product $x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)$ $\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)$.... dargeſtellt werden? (Dieſe Form müſſen die Factoren haben, weil das erſte Glied der Gleichung: $\frac{\text{tang. } x}{x} = 0, = 1$ iſt). Daraus könnte man wenigſtens die Vermuthung ziehen, daß die gewöhnliche Beweisart in irgend einem Puncte nicht ganz vollſtändig ſey. Ein anderer mehr directer Zweifel ſcheint in folgender Betrachtung zu liegen. Wenn man eine zuſammengeſetzte algebraiſche Größe X, eine Function von x, als ein Product aus einfachen Factoren $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$ u. ſ. w. ausdrückt, ſo müſſen α, β, γ u. ſ. w. die Wurzeln der Gleichung $X = 0$ ſeyn, d. i. wenn man dieſe Werthe von x in die Function ſetzt, ſo muß X wirklich verſchwinden; oder die einzelnen Glieder dieſer Größe zuſammengenommen müſſen 0 geben. Für ſin. x iſt $X = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1...5}$ — &c.: nun wird zwar ſin. x offenbar $= 0$, für $x = 0$, $= \pm \pi$, $\pm 2\pi$ ꝛc; ob aber der unendliche Reihen-Ausdruck auch wirklich verſchwinde, wenn für x, π, 2π ꝛc. geſetzt wird, möchte vielleicht eine andere Frage ſeyn. Bekanntlich unterſcheidet man in der Lehre von den Reihen analytiſche und arithmetiſche Summen. Jene ſind eigentlich Ausdrückungen, aus deren Entwicklung die Reihe entſtanden

iſt, oder wenigſtens als entſtanden gedacht werden kann*). In dieſem Sinne iſt ſin. x immer die Summe der unendlichen Reihe: $x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1 \ldots 5} -$ &c.: und ſo kann dieſe Summation, in ihrer Allgemeinheit, bey analytiſchen Unterſuchungen mit Nutzen gebraucht werden. Der Gebrauch, der aber hier von derſelben gemacht wird, ſcheint noch mehr vorauszuſetzen, nemlich daß ſin. x auch vor $x = \pi$, 2π u. ſ. w. die arithmetiſche Summe jener Reihe seyn müſſe. Und das iſt es, was die Gründe, woraus man gewöhnlich Reihen dieſer Art herleitet, vielleicht nicht mit der vollkommenſten Evidenz darthun. So gilt die Reihe, welche den Bogen durch den Sinus ausdrückt, offenbar nur für den kleinſten Bogen, der einem gewiſſen Sinus zugehört. Das gewöhnliche Verfahren, die Reihe, von welcher hier die die Rede iſt, zu erweiſen, iſt, dieſelbige aus der nur genannten abzuleiten. Aber auch die andern Methoden, den Sinus auszudrücken, möchten immer noch einigen Zweifel in Anſehung des erwähnten Fragepuncts übrig laſſen **). Die Frage, um ſie hier noch einmal beſtimmt anzugeben, iſt, ob Sätze, welche für endliche algebraiſche Ausdrücke erwieſen ſind, die immer eine arithmetiſche Summe haben, auch auf tranſcendente unendliche Reihen-Ausdrücke

*) *Euler* de ſeriebus reciprocis, Comment. Petrop. Nov. T. V.

**) Eine einfachere Methode, als die im Text zuerſt erwähnte, lehrt Herr Hofrath Käſtner (l. c. §. 285), nemlich durch die Differential-Gleichung $\frac{d^2 s}{d \phi^2} = - s$. Die gewöhnliche Reihe für den Sinus iſt eigentlich nur ein particulares Integral davon, wodurch man ſtillſchweigend anzunehmen ſcheint, daß ϕ den kleinſten Bogen bedeute.

können angewandt werden, denen in vielen Fällen nur eine analytiſche Summe zukommt *). — Dieſe Gedanken vollſtändig zu entwickeln, würde hier zu weitläufig ſeyn, und noch andere Zwiſchenunterſuchungen nothwendig machen **), auch gewiſſermaßen überflüßig, da meine Abſicht nichts weniger als die war, den Satz ſelbſten zu widerlegen, ſondern nur gegen die gewöhnliche Beweisart einige Einwendungen vorzutragen, die ich mir ſelbſt gegenwärtig nicht vollkommen befriedigend auflöſen kann: denn freylich iſt es ſehr oft leichter, Zweifel zu machen, als ſolche zu heben.

XVIII. Summirung der Reihen, in welchen Tangenten, Sekanten u. ſ. w. vorkommen.

1) So häufig die Analyſten Unterſuchungen über Reihen von Coſinuſſen und Sinuſſen angeſtellt haben, ſo wenig haben ſie ſich ſeither mit Summirung ſolcher Reihen beſchäftigt, in deren Gliedern **Tangenten** und **Sekanten** befindlich ſind. Auch läßt ſich wirklich das Verfahren,

*) Ueberhaupt hat es Schwürigkeiten, unendliche Reihen als Gleichungen zu betrachten. So könnte man aus den Reihen, welche den Bogen durch den Sinus, oder die Tangente ausdrücken, ſchließen, daß einem verſchwindenden Bogen unzählige Sinuſſe oder Tangenten zukommen: da gewiß jeder Bogen nur einen Sinus und eine Tangente hat, auch nicht einmal mehrere unmögliche.

**) Alle Unterſuchungen dieſer Art müßten auf ſolche Begriffe zurückgebracht werden, wie H. H. Käſtner bey der Reihe, die aus $\frac{1}{1 \pm x}$ entſteht, entwickelt hat (Anal. d. Endl. §. 15) Bey genauerer Prüfung wird man finden, daß alle Summationen unendlicher Reihen von dieſer ausgehen, oder durch irgend einen, zuweilen verborgenen, Weg zu derſelben zurückkommen.

welches man am gewöhnlichſten bey der Summirung der Reihen jener Art gebraucht hat (XVI.), bey den Reihen der andern Art gar nicht anbringen. Ich wage hier einen **Verſuch**, dieſe Lücke einigermaßen auszufüllen, und die Anwendung der gegenwärtigen Methode auch bey dieſen Reihen zu zeigen. Zuerſt wird es nicht überflüßig ſeyn, dieſelbige bey einer von den wenigen Reihen, deren Summen ſchon bekannt ſind, gleichſam im voraus zu **verſuchen**. Dieſe Reihe iſt folgende:

$$\text{tang.}\ \varphi + \tfrac{1}{2}\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\ \text{tang}\ \tfrac{1}{4}\varphi + \tfrac{1}{8}\ \text{tang}\ \tfrac{1}{8}\varphi$$

$$+ \ \&c. = \Sigma \frac{1}{2^{n-1}}\ \text{tang.}\ \frac{\varphi}{2^{n-1}}.$$

Euler hat durch ein, zwar einfaches, aber gewiſſermaßen indirectes Verfahren, ihre Summe $= \frac{1}{\varphi} - 2\ \text{cot.}\ 2\ \varphi$ gefunden. Ein beſonderer Fall dieſer Summation gibt eine zierliche Conſtruction für die Quadratur des Kreiſes, welche ſchon **Carteſius** kannte *).

2) Man drücke, um die Summe dieſer Reihe zu finden, nach der bisherigen Gewohnheit die Tangenten durch ihre unendliche Progreſſionen aus, ſo wird $\Sigma \frac{1}{2^{n-1}}.\ \text{tang.}\ \frac{\varphi}{2^{n-1}}$

$$= \Sigma \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2^2(2^2-1)}{1.2}\, \mathfrak{A}^{I}\, \frac{\varphi}{2^{n-1}} \\ + \frac{2^4(2^4-1)}{1..4}\, \mathfrak{A}^{II}\, \frac{\varphi^3}{2^{3(n-1)}} \\ + \ \&c. \end{array} \right\}$$

*) Euler. Annotationes in locum quendam Carteſii. — Comment. Petrop. Nov. T. VIII p. 157 &c. In den Opuſc. Analyt. T. I. iſt dieſe Unterſuchung fortgeſetzt.

Nun iſt für ein willkürliches x, $\Sigma \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x-1}$; ſetzt man alſo für x nach und nach 2^2, 2^4, 2^6 u. ſ. w., und ſummirt die einzelnen Glieder dieſes Ausdrucks, ſo heben ſich $2^2 - 1$, $2^4 - 1$ u. ſ. w. im Zähler und Nenner gegenſeitig auf, und man erhält $\Sigma \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \text{tang.} \frac{\varphi}{2^{n-1}}$ $= \frac{2^4 \mathfrak{A}^I \varphi}{1 \cdot 2} + \frac{2^8 \mathfrak{A}^{II} \varphi^3}{1 \cdot \cdot 4} + \&c. = \frac{1}{\varphi} - 2 \cot. 2\varphi$, wie unmittelbar aus der obigen Reihe für die Cotangente folgt *).

3) Wenn man die Gründe des Verfahrens unterſucht, wodurch im Anfang (III.) die reciproke Reihen mit Coſinuſſen und Sinuſſen vielfacher Bögen ſummirt worden ſind, ſo wird man leicht auf den Gedanken gerathen, daß ſich daſſelbe auch bey Tangenten anbringen laſſe. Die allgemeine Auflöſung iſt dieſe. Es ſey die Summe der unendlichen Reihe: t. $\varphi - \frac{\text{t.}\, 2\varphi}{2^{2m+1}} + \frac{\text{t.}\, 3\varphi}{3^{2m+1}}$ $- \frac{\text{t.}\, 4\varphi}{4^{2m+1}} + \&c. = \Sigma \pm \frac{\text{t.}\, n\varphi}{n^{2m+1}} = \mathfrak{S}$, ſo wird durch Verwandlung der Tangenten in ihre Progreſſionen:

*) Die Summe einer zuſammengeſetzten Größe (was das Wort Summe oder das Zeichen Σ hier bedeute, iſt bekannt) wird aus der Summe der einzelnen Glieder zuſammengeſetzt. Die Summe eines Products, deſſen einer Factor n nicht enthält, alſo eine Conſtante iſt, gleicht dem Producte aus dieſer Conſtante in die Summe des andern Factors. Dieſe beyden Bemerkungen vorausgeſetzt, gewährt die gegenwärtige Bezeichnungsart immer ſogleich die allgemeine Ueberſicht: welches kein unweſentlicher Vortheil iſt.

$$\mathfrak{S} = \frac{2^2(2^2-1)}{1\,.\,2}\mathfrak{A}^I\,\varphi\,\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m}}$$

$$+ \frac{2^4(2^4-1)}{1\,.\,.\,4}\mathfrak{A}^{II}\,\varphi^3\,\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-2}}$$

$$+ \frac{2^6(2^6-1)}{1\,.\,.\,6}\mathfrak{A}^{III}\,\varphi^5\,\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-1}} + \&c.$$

Das Geſetz des Fortgangs bey dieſem Ausdruck iſt auffallend; die Summen, welche in demſelben vorkommen, ſind durch die vorhergehenden Unterſuchungen bekannt; die letzte derſelben iſt $\Sigma \pm n^0 = \frac{1}{2}$, die folgenden mit geraden bejahten Exponenten verſchwinden. So iſt alſo z. B.

$$\text{t.}\,\varphi - \frac{\text{t.}\,2\,\varphi}{2^3} + \frac{\text{t.}\,3\,\varphi}{3^3} - \frac{\text{t.}\,4\,\varphi}{4^3} + \&c.$$

$$= \frac{\pi^2\,\varphi}{12} + \frac{\varphi^3}{6}$$

Ueberhaupt laſſen ſich die Summen dieſer unendlichen Reihen, in welchen der Exponent im Nenner eine ungerade Zahl iſt, immer durch Potenzen von φ und π ausdrücken. — Eben dieſe Summen ergeben ſich auch, wenn man vor tang. $n\,\varphi$, $\Sigma \pm$ ſin. $n\,\varphi$ ſetzt, und die oben erwähnte Summation $\Sigma \pm \frac{\text{ſin.}\,n\,\varphi}{n^{2m+1}}$ zu Hülfe nimmt.

3) Durch eben dieſes Verfahren erhält man die Summe folgender unendlichen Reihe:

$$\text{t.}\,\varphi - \frac{\text{t.}\,3\varphi}{3^{2m}} + \frac{\text{t.}\,5\varphi}{5^{2m}} - \&c. = \Sigma \pm \frac{\text{t.}\,(2\,n-1)\,\varphi}{(2\,n-1)^{2m}}$$

Dieſe Summe iſt nemlich

$$= \frac{2^2(2^2-1)}{1\,.\,2}\,\mathfrak{A}^I\,\varphi\,\Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-1}}$$

$$+ \frac{2^4(2^4-1)}{1\,.\,.\,4}\,\mathfrak{A}^{II}\,\varphi^3\,\Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-3}}$$

$$+ \frac{2^6(2^6-1)}{1\,.\,.\,.\,6}\,\mathfrak{A}^{III}\,\varphi^5\,\Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-5}}$$

$+$ &c.

Bey denen hier vorkommenden Partialſummen, die aus dem vorhergehenden bekannt ſind, kommt man endlich auf verſchwindende Summen: die letzte iſt

$$= \Sigma \pm \frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

4) Durch das gleiche Verfahren laſſen ſich ähnliche Reihen mit Cotangenten vielfacher Bögen ſummiren. Es iſt nemlich $\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m+1}}\,.\,\cot. n\varphi = \frac{1}{\varphi}\,\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m+2}}$

$$- \frac{2^2\,\mathfrak{A}^I}{1\,.\,2}\,\varphi\,\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m}} - \frac{2^4\,\mathfrak{A}^{II}}{1\,.\,.\,4}\,\varphi^3\,\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-2}}$$

$+$ &c. Eben ſo läßt ſich $\Sigma \pm \frac{\cot. \varphi(2n-1)}{(2n-1)^{2m}}$ angeben. Die letzte der in jenem Ausdruck vorkommenden Partialſummen iſt $= \Sigma \pm 1 = \frac{1}{2}$; die folgenden alle verſchwinden.

5) Eben ſo erhellt, wie die Summe der unendlichen Reihe:

$$\text{coſec.}\,\varphi - \frac{1}{2^{2m+1}}\,.\,\text{coſec.}\,2\,\varphi + \frac{1}{3^{2m+1}}\,.\,\text{coſec.}\,3\,\varphi - \text{\&c.}$$

gefunden werde. Der Ausdruck für die Summe läßt ſich leicht aus der obigen Reihe für die **Coſekante** vermittelſt des bisherigen Verfahrens herleiten, gleicherweiſe auch $\Sigma \pm \frac{\text{coſec.}\, \varphi (2n-1)}{(2n-1)^{2m}}$. Bey eben ſolchen **Sekanten-Reihen** muſſen die Exponenten der natürlichen Zahlen in den Nennern gerade ſeyn; dann findet ſich $\Sigma \pm \frac{\text{ſec.}\, n \varphi}{n^{2m}}$

$$= \alpha^I \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m}} + \alpha^{II} \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-2}} + \alpha^{III} \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-4}}$$

+ &c., wobey man wiederum auf verſchwindende Summen kommt, eben ſo wie bey dem Ausdrucke für

$$\Sigma \pm \frac{\text{ſec.}\, (2n-1) \varphi}{(2n-1)^{2m-1}}.$$

6) Aus den bisherigen Summationen laſſen ſich durch Differentiation und Integration noch mehrere andre herleiten: ſo erhält man aus der Tangenten-Reihe eine andere, deren allgemeines Glied $= \pm \frac{(\text{ſec.}\, n \varphi)^2}{n^{2m}}$ (weil nemlich d. tang. $x = \text{d}\, x$ ſec. x^2); eben ſo ergibt ſich aus der Cotangenten-Reihe, $\Sigma \pm \frac{(\text{coſec.}\, n \varphi)^2}{n^{2m}}$ u. ſ. w. Durch Integration fließen aus dieſen Reihen auch die Summen von folgenden beyden:

$$\frac{\text{log. coſ.}\, \varphi}{1^{2m+2}} - \frac{\text{log. coſ.}\, 2\varphi}{2^{2m+2}} + \frac{\text{log. coſ.}\, 3\varphi}{3^{2m+2}} - \frac{\text{log, coſ.}\, 4\varphi}{3^{2m+1}} + \&c.$$

$$\frac{\text{log. ſin.}\, \varphi}{1^{2m+2}} - \frac{\text{log. ſin.}\, 2\varphi}{2^{2m+1}} + \frac{\text{log. ſin.}\, 3\varphi}{3^{2m+1}} - \frac{\text{log. ſin.}\, 4\varphi}{4^{2m+1}} + \&c.$$

Es iſt nemlich $\int dx \tan x = -\log \cos x$, $\int dx \cot x = \log \sin x$. Bey der erſten Reihe iſt die Conſtante $= 0$; bey der andern, in deren Summe $\log \varphi \, \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m+2}}$ vorkommt, wird ſie aus dem Falle $\varphi = 0$ gefunden $= -\frac{\log. 1}{1} + \frac{\log. 2}{2^{2m+2}} - \frac{\log. 3.}{3^{2m+2}}$ + &c.; daß alſo ſtatt der zwoten Reihe eine andere geſetzt werden muß, deren allgemeines Glied

$$= \pm \frac{\log. \frac{1}{n} \sin. n\varphi}{n^{2m+2}}$$ iſt. Aus der Coſekanten-Reihe (5) fließt durch eine ähnliche Integration die Summe von folgender Reihe:

$$\log. \tfrac{2}{1} \text{ t. } \varphi - \frac{1}{2^{2m+2}} \log. \tfrac{2}{2} \text{ t. } 2\varphi$$
$$+ \frac{1}{3^{2m+2}} . \log. \tfrac{2}{3} \text{ t. } 3\varphi$$
$$- \frac{1}{4^{2m+2}} . \log. \tfrac{3}{4} \text{ t. } 4\varphi + \&c.$$

deren allgemeines Glied $= \pm \frac{1}{n^{2m+2}} . \log. \frac{2}{n} \text{tang. } n\varphi$; dabey wird das bekañte Integral: $\int \frac{dx}{\sin. x} = \log. \text{tang. } \frac{1}{2} x$ zum Grunde gelegt; daß die tang. $n\varphi$ noch mit $\frac{2}{n}$ multiplicirt werden muß, folgt, wie vorhin, aus der Beſtimmung der Conſtante für den Fall $\varphi = 0$. Eine ähnliche Summation ergibt ſich aus der Reihe von Sekanten,

es

es iſt nemlich $\int dx \sec. x = \log. t. \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x\right)$, und daraus das allgemeine Glied der durch Integration entſpringenden Reihe $= \pm \frac{1}{n^{2m+1}} . \log. t. \left(\frac{\pi}{4} + n\varphi\right)$ — Wollte man die Integration fortſetzen, ſo kommt man auf Integrale von der Form $\int dx \log. \cos. x$, $\int dx \log. \sin. x$, $\int dx \log. t. x$. Setzt man in dem erſten vor den Coſinus den Ausdruck durch Exponential-Größen, ſo wird daſſelbe $= - x \log. 2 + \frac{x^2}{2} \sqrt{-1} + \int dx \log. (1 + e^{-2x\sqrt{-1}}) = - x \log. 2 + \frac{x^2}{2} \sqrt{-1} - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(\Sigma \pm \frac{z^n}{n^2} - \frac{\pi^2}{12}\right)$, wenn $e^{-2x\sqrt{-1}} = z$, und das Integral ſo genommen wird, daß es für $x = 0$ verſchwindet *). Daraus überſieht man, daß das letztere von der Summation der Reihe: $z - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} - \frac{z^4}{4^2} + \&c.$ abhängt; für $z = +1$ und $= -1$ iſt dieſelbige aus dem vorhergehenden bekannt, aber auch für $z = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ und $= \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (wovon weiter unten die Rede ſeyn wird); jene Werthe von z geben $x = \pi$, $= \frac{\pi}{2}$, und ſo erhellt daß $\int dx \log. \cos. x$, für $x = \frac{\pi}{2}$, gleich werde

*) Man überzeugt ſich davon leicht, wenn man den Logarithmen in eine Reihe auflöſt.

$-\frac{\pi}{2}$ log. 2. Die übrigen 3 Werthe laſſen ſich gleichfalls angeben, aber unter einer unmöglichen Geſtalt. — Aus dem Integral ſin. d x log. coſ. x folgt das andere ſ. d y log. ſin. y unmittelbar, wenn man $y = \frac{\pi}{2} - x$ ſetzt: dadurch verwandelt ſich dieſes in $-$ſ. d x log. coſ. x $= \frac{\pi}{2}$ log. 2, von $x = 0$ bis zu $x = \frac{\pi}{2}$ genommen, alſo $= -\frac{\pi}{2}$ log. 2 von $x = \frac{\pi}{2}$ bis zu $x = 0$, oder von $y = 0$ bis zu $y = \frac{\pi}{2}$ *).

7) Wenn man die Gründe des Verfahrens genauer betrachtet, wodurch in (2) $\Sigma \frac{1}{2^n}$. tang. $\frac{\varphi}{2^n}$ gefunden worden, ſo wird man ſich bald davon überzeugen, daß ſich daſſelbe noch weiter erſtrecke, nemlich auf die Fälle, wenn im Nenner ſtatt n; $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{4}$, $\frac{n}{8}$ ... $\frac{n}{2^m}$ vorkommen, oder die Exponenten von 2 nicht bloß die natürliche Zahlen, ſondern ſubmultipla derſelben nach irgend einer Potenz, auch von 2, ſind. Bey der **Euleriſchen** Reihe iſt $m = 0$: für $m = 1$ findet ſich $\Sigma \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$. tang. $\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$

*) Man vergleiche damit das Verfahren, wodurch Euler bey einer andern Veranlaſſung den Particularwerth von ſ. d ϕ log. coſ. ϕ, von $\phi = 0$ bis zu $\phi = \frac{\pi}{2}$, erweiſt (Nov. Comment. Petrop. Tom. XIV. p. 167).

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ tang. } \frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \text{ tang. } \frac{\varphi}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{8}} \text{ tang. } \frac{\varphi}{\sqrt{8}}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{16}} \text{ tang. } \frac{\varphi}{\sqrt{16}} + \&c. = \frac{2}{\varphi} - \text{cot. } \varphi$$

$- \sqrt{2} \,.\, \text{cot. } \varphi \sqrt{2}$; dort ſind die Nenner 2, 4, 8, u. ſ. w. hier die Quadratwurzeln dieſer Zahlen. Für Biquadratwurzeln, Wurzeln vom 8ten, 16ten Grade u. ſ. w. erhält man ähnliche Ausdrücke.

XIX. Reihen von Bögen, deren Tangenten nach einer gewiſſen Ordnung fortſchreiten.

1) Das Verfahren, ſolche Reihen zu ſummiren, beruhet darauf, daß man, wie ſeither, die Bögen durch ihre Progreſſionen ausdrückt. So wird alſo die Summe folgender unendlichen Reihe: $A\,\text{t.}\,x - \frac{1}{2^{2m+1}} \,.\, A\,\text{t.}\,2\,x$

$$+ \frac{1}{3^{2m+1}} \,.\, A\,\text{t.}\,3\,x - \&c. = \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m+1}} \,.\, A\,\text{t.}\,n\,x$$

$$= x\,\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m}} - \frac{x^3}{3}\,\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-2}} + \frac{x^5}{5}\,\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-4}}$$

$- \&c.$, welcher Ausdruck mit $\pm \frac{x^{2m+1}}{2m+1} \,.\, \frac{1}{2}$ aufhört.

2) Dieſe Reihen zu ſummiren iſt mir noch ein anderes Verfahren beygefallen, welches ich hier anzuzeigen nicht für überflüßig halte, weil es zur Beſtätigung des nur gefundenen Reſultats dient, und ſonſt nicht gewöhnlich iſt. Es iſt nemlich $A\,\text{t.}\,\varphi = \int \frac{d\,z}{\log.\,z} \,.\, \text{ſin.}\,\varphi\,\log.\,z$

das Integral ſo genommen, daß es für $z = 0$ verſchwindet, und dann $z = 1$ geſetzt wird *). So erhält man

alſo . . . $\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m+1}}$. Arc. tang. $n\varphi$

$$= \int \frac{dz}{\log. z} . \Sigma \pm \frac{\sin. n\varphi \log. z}{n^{2m+1}};$$

die Summe, welche in dieſem Integral vorkommt, iſt aus (III.) bekannt, und hat dieſe Geſtalt: $A\varphi \log. z + B\varphi^3 \overline{\log. z}^3 + \&c.$; daraus wird das Integral $= A\varphi + B\varphi^3 \int dz (\log. z)^2 + \&c.$ Nun iſt für jedes m, $\int dz (\log. z)^m = \pm 1 . 2 . 3 . . m$ (wenn, wie ſich hier gehört, der Werth von $z = 0$ bis zu $z = 1$ genommen wird): dieſen Ausdruck für $m = 2, 4, 6$ u. ſ. w. ſubſtituirt, ergibt ſich am Ende

$\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m+1}}$. Arc. t. $n\varphi$, eben ſo wie in (1).

3) Unter die merkwürdigſten Reihen von Bögen, deren Tangenten nach einem gewiſſen Geſetze fortſchreiten, gehören diejenigen, welche **Euler** betrachtet und durch ein **indirektes** Verfahren ſummirt hat. Er erklärt ſie vorzüglich deswegen aller Aufmerkſamkeit werth, weil noch keine Methode bekannt ſey, ihre Summen a priori zu finden **). Dieſen Mangel ſcheint mir nachſolgendes

*) Euler. Speculat. analyt. Comment. Petr. Nov. T. XX. p. 65.

**) Euler. De progreſſionibus arcuum circularium, quorum tangentes ſecundum certam legem procedunt. Nov. Comment. Petrop. Tom. IX. p. 40. — — — — Im Anfang gibt er die Summen der Reihen an, deren allgemeines Glied $A t. \frac{1}{2n^2}$, $A t. \frac{1}{n^2 + n + 1}$ iſt, und ſagt von denſelben: „Tales ſeries

Verfahren zu erſetzen, welches noch zu viel allgemeinern Summationen führet. Es ſey nemlich die Summe folgender Reihe: Arc. tang. $\frac{\varphi}{1}$ + A. t. $\frac{\varphi}{2^2}$ + A. t. $\frac{\varphi}{3^2}$ + &c. $= \Sigma A$ t. $\frac{\varphi}{n^2} = y$, ſo wird $dy = d\varphi \Sigma \frac{n^2}{n^4 + \varphi^2}$ $= \frac{d\varphi}{2} \Sigma \left(\frac{1}{n^2 - \varphi \sqrt{-1}} + \frac{1}{n^2 + \varphi \sqrt{-1}} \right)$. Die Summen, welche in $\frac{d\varphi}{2}$ multiplicirt ſind, ergeben ſich aus (XI.), da $\Sigma \frac{1}{n^2 - a} = \frac{1}{2a} - \frac{\pi \sqrt{a}}{2a \text{ tang. } \pi \sqrt{a}}$ wobey man zu gegenwärtiger Abſicht $a = \varphi \sqrt{-1}$, und $= -\varphi \sqrt{-1}$ ſetzt. Daraus findet man endlich, durch Integration, nach gehöriger Behandlung der unmöglichen Größen, und Beſtimmung der Conſtante, $y = \frac{\pi}{4} -$ Arc. tang. $\left(\frac{e^{\pi \sqrt{2\varphi}} - 1}{e^{\pi \sqrt{2\varphi}} + 1} \text{. cot. } \pi \sqrt{\frac{\varphi}{2}} \right)$. Für den Fall, deſſen Euler erwähnt hat, iſt $\varphi = \frac{1}{2}$, alſo cot. $\pi \sqrt{\frac{\varphi}{2}} = 0$, und die Summe $= \frac{\pi}{4}$.

6) Dieſes Verfahren erſtreckt ſich noch weiter: in den Nennern der Tangenten können nemlich ſtatt der Qua-

eo magis videntur omni attentione dignæ, quod nulla adhuc conſtet methodus earum ſummam a priori inveniendi, atque etiam ipſi arcus omnes inter ſe ſint incommenſurabiles. Quin etiam ne exſpectare quidem licet methodum, cujus ope in genere hujusmodi ſerierum, quamcunque legem tangentes ſequantur, ſumma inveſtigari queat — — Quam ob rem in hoc negotio alia via non patet, niſi ut a poſteriori hujusmodi ſeries inveſtigemus, quarum deinceps contemplatio fortaſſe viam quandam directam patefaciet — —

drate der natürlichen Zahlen, Potenzen derſelben von irgend einem geraden Exponenten befindlich ſeyn: daß alſo daraus die Summation dieſer unendlichen Reihe folgt:

$$\text{Arc. tang. } \frac{\varphi}{1^{2m}} + \text{Arc. t. } \frac{\varphi}{2^{2m}} + \text{A. t. } \frac{\varphi}{2^{2m}} \dots$$

$$+ \text{A. t. } \frac{\varphi}{n^{2m}} + \&c.$$

So iſt zum Beyſpiel für $m = 2$, $\Sigma \text{ Arc. tang. } \frac{\varphi}{n^4}$ $= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2\sqrt{-1}} . \log. \left(\frac{\text{ſin. } e\,z . \text{ſin. } e^3\,z}{\text{ſin. } z . \text{ſin. } e^2\,z}\right)$, wenn $e^2 = \sqrt{-1}$, und $z = \pi . \left(\frac{\varphi}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{4}}$ geſetzt wird. Der logarithmiſche Theil verwandelt ſich bey näherer Betrachtung in einen Bogen.

9) So wie ich in (XII.) die Summation der reciproken Reihen dahin erweitert habe, daß ſtatt $\frac{1}{n^{2m}}$ das allgemeine Glied jedwede gebrochene gerade Function des Index n ſeyn kann, ſo läßt ſich auch in (8) $\Sigma \text{ Arc. tang. } \frac{\varphi}{N} = y$ angeben, wenn N eine ſolche Function iſt. Es iſt nemlich $\text{d}y = \text{d}\varphi\, \Sigma \frac{N}{N^2 + \varphi^2}$; die Summe, welche in $\text{d}\varphi$ multiplicirt iſt, folgt aus denen in (XII.) angeſtellten Betrachtungen, ſie ſey $= P$, eine Function von φ, ſo wird $y = \text{ſ. } P\,\text{d}\varphi$: die Integrale, welche dabey vorkommen, ſind alle von der Form $\text{ſ. } \frac{\text{d}x}{\text{tang. } x} = \log. \text{ſin. } x$,

So einfach und leicht zu überſehen dieſe allgemeine Vorſtellung iſt, ſo verwickelt werden dagegen die Rechnungen, und ihre ausführliche Entwickelung würde meine gegenwärtige Abſicht überſchreiten. Die Hauptſchwürigkeit beruhet auf der Behandlung der unmöglichen Größen, welche alle auf die Form $A + B\sqrt{-1}$ gebracht werden müſſen, daß ſich zuletzt das unmögliche aufhebe, und die Summe durch einen Cirkelbogen ausgedrückt werde, welches immer angeht, wie man ſchon aus dem angeführten ſchließen kann. — Uebrigens erhellt, daß die Zeichen in der Reihe auch abwechſeln, und in dieſem Falle ſtatt der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen auch die ungeraden Potenzen der ungeraden Zahlen vorkommen können.

10) Bey der andern Reihe, die ich (in der Anm.) aus **Eulern** angeführt habe, und deren allgemeines Glied $= \text{Arc. tang.} \dfrac{1}{n^2 + n + 1}$, iſt zwar N in (9) keine gerade Function von n; ſie läßt ſich aber doch nach eben den Gründen behandeln, und auf ähnliche Weiſe erweitern: es werde in den Zähler ſtatt 1, φ und in den Nenner β geſetzt, ſo wird die Summe der unendlichen Reihe, deren allgemeines Glied $= \text{Arc. tang.} \dfrac{\varphi}{n^2 + n + \beta}$ iſt, $=$

$$- \text{Arc. tang.} \frac{\varphi}{\beta} + \text{Arc. tang.} \left\{ \frac{e^{\frac{\pi\mu}{2}} - e^{-\frac{\pi\mu}{2}}}{e^{\frac{\pi\mu}{2}} + e^{-\frac{\pi\mu}{2}}} . \text{tang.} \frac{\pi m}{2} \right\}$$

wenn $\sqrt{(1 - 4\beta - 4\varphi\sqrt{-1})} = m - \mu\sqrt{-1}$, woraus m und μ leicht beſtimmt werden können. In jenem Falle, da $\beta = \varphi = 1$, iſt $m = 1$ und $\mu = 2$,

alſo die Summe $= \frac{\pi}{4}$. Ueberhaupt ſo oft $\beta = \varphi^2$ iſt, wird die Summe = Arc. tang. φ. Solcher Sätze laſſen ſich noch mehrere erweiſen, und man wird leicht bemerken, wie auch dieſe Unterſuchung noch weiter getrieben und allgemeiner gemacht werden könnte.

XX. Andere Anwendungen der Methode.

1) Aus dem was in (XIV.) iſt geſagt worden, wird man leicht überſehen, daß das bisher beobachtete Verfahren noch in vielen andern Fällen, mit gehöriger Vorſicht, könne gebraucht werden, um entweder unendliche Reihen unmittelbar zu ſummiren, oder aus ſolchen, deren Summen bekannt ſind, durch Verwandlung andere herzuleiten. Aus (XV.) erhellt, daß ſich insbeſondere dadurch unzählige Reihen ergeben, in denen die **Bernoulliſchen** Zahlen vorkommen, und welche theils convergiren, theils divergiren. Ueber Reihen dieſer Art hat **Euler** *) eigene Unterſuchungen angeſtellt, und Summationen herausgebracht, welche mit denen auf die angezeigte Weiſe gefundenen entweder verglichen werden können, oder verbunden zu neuen Reſultaten. — Aus der Menge mögen einige Beyſpiele genügen.

2) Wenn man in folgender unendlichen Reihe:

$$\log.(1+x) - \log.(1+2x) + \log.(1+3x) - \log.(1+4x) + \&c.$$

die Logarithmen in ihre Progreſſionen auflöſt, ſo wird

*) Inſtit. Calc. Diff. Cap. VI. P. II; vollſtändiger in den Comment. Petrop. Nov. Tom. XIV. P. I.

$$\Sigma \pm \log.(1+nx) = x\frac{(2^2-1)}{2}\mathfrak{A}^I - \frac{x^3}{3}\frac{(2^4-1)}{4}\mathfrak{A}^{II}$$

$$+ \frac{x^5}{5}\frac{(2^6-1)}{6}\mathfrak{A}^{III} - \&c.$$ (nemlich die Coefficienten der geraden Potenzen von x verſchwinden, und bey den ungeraden ſind ſie aus (XV.) bekannt). Setzt man hier $x = 1$, ſo folgt aus **Walliſens** unendlichem Producte für π, $\Sigma \pm \log.(1+nx) = \frac{1}{2}\log.\frac{\pi}{2}$, daß alſo dieſer Logarithme auch die Summe der andern unendlichen Reihe für $x = 1$ ausdrückt. Verbindet man damit **Eulers** Reihe (§. 158.), ſo folgt daraus noch die andere:

$$\log. 2 = 1 - \frac{2^2\,\mathfrak{A}^I}{1.2} + \frac{2^4\,\mathfrak{A}^{II}}{3.4} - \frac{2^6\,\mathfrak{A}^{III}}{5.6} + \&c.$$

Eine zwote Folgerung iſt dieſe: man kann die zuerſt gefundene Summation durch $2\,S^I - S$ darſtellen, wo S und

$$S^I = \frac{\mathfrak{A}^I}{1.2}z - \frac{\mathfrak{A}^{II}}{3.4}z^3 + \frac{\mathfrak{A}^{III}}{5.6}z^5 - \&c.,$$ dort $z = 2$, hier $z = 1$ genommen. So läßt ſich das anbringen, was **Euler** (§. 157.) erwieſen hat. Die Vergleichung zeigt, daß $s = l\,1 + l\,2 + .. + l\,x = \log.(1.2..x) = \frac{1}{1}\log.\pi - \log.2$ ſeyn müſſe für $x = \frac{1}{2}$, oder $1.2.3..x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, wie aus ganz andern Gründen durch die Methode der **Interpolation** gefunden worden iſt *). Eine andere Reihe als die nur erwähnte für log. 2 findet ſich aus $\Sigma \pm \frac{1}{n} = \log. 2$,

*) Inſtit. Calc. Diff. Cap. XVII. p. 835.

wenn $\frac{1}{n} = \frac{1}{(n-1)+1}$ in die bekannte Progreſſion aufgelöſt wird. So laſſen ſich auch aus $\Sigma \pm \frac{1}{n^2}$, überhaupt aus $\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m}}$ neue Reihen herleiten, wenn man $\frac{1}{n^{2m}} = ((n-1)+1)^{-2m}$ durch den Binomiſchen Satz ausdrückt. In allen ſolchen Reihen kommen die Bernoulliſchen Zahlen vor, und ihre Summen laſſen ſich nach (III.) angeben. Dieſe Reihen ſelbſt ſind divergirende, und wie ihre Summen zu verſtehen ſeyen, erhellt aus (XVII).

3) Da Exponentialgrößen auch in unendliche Reihen können aufgelöſt werden, ſo läßt ſich ein gleiches Verfahren auch bey dieſen anwenden. So iſt $e^x - e^{2x} + e^{3x} -$ &c. $= \frac{1}{2}\frac{(e^x-1)}{e^x+1)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + x\,\Sigma \pm n + \frac{x^3}{1.2.3}\Sigma \pm n^3 +$ &c; daraus fließt folgende Summation: $\frac{e^x-1}{2(e^x+1)} = \frac{x(2^2-1)}{2}\mathfrak{A}^I - \frac{x^3}{1.2.3.}\frac{(2^4-1)}{4}\mathfrak{A}^{II} + \frac{x^5}{1\ldots6}(2^6-1)\mathfrak{A}^{III} -$ &c.: welche ſich mit einer ähnlichen bey **Eulern** (§. 163.) vergleichen läßt, wenn man das dortige $a = e^x$ ſetzt, daß $x = l\,a$ werde. Aus dieſer Reihe laſſen ſich unzählige andre durch Differentiation und Integration herleiten.

4) Da ich im vorhergehenden (XVII.) die Summen der geraden Potenzen der ungeraden Zahlen, mit abwechſelnden Zeichen, durch die Größen $\alpha^I, \alpha^{II}, \alpha^{III}$ u. ſ. w.

welche den Bernoulliſchen Zahlen entſprechen, ausgedrückt habe, ſo erhellt von ſelbſt, daß durch das bisherige Verfahren auch ſolche Reihen, in welchen jene als Coefficienten vorkommen, ſummirt werden können. So läßt ſich hier (2) und (3) anbringen. Ein anderes Beyſpiel iſt folgendes. Man ſetze in der Reihe für A. t. x, $x = e^z$, und löſe dann die Exponential-Größen auf, ſo wird die Summe der unendlichen Reihe: $\alpha^I . z - \frac{\alpha^{II}}{1.2.3} . z^3 + \frac{\alpha^{III}}{1...5} z^5 - \&c. = \text{Arc. tang.} \frac{e^{2z} - 1}{2 e^z}$.

5) Merkwürdiger ſcheinen mir die Summationen folgender unendlicher Reihen zu ſeyn, welche zugleich ſtark convergiren. Bekanntlich iſt

$$\frac{\text{ſin.}\ \pi x}{\pi x} = \frac{1 - x^2}{1} . \frac{4 - x^2}{4} . \frac{9 - x^2}{9} . \&c.$$

Man verwandle dieſes unendliche Product in eine Reihe von Logarithmen, und löſe dieſe in ihre Progreſſionen auf, ſo ergibt ſich: $\log. \frac{\pi x}{\text{ſin.}\ \pi x} = x^2 \Sigma \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} x^4 \Sigma \frac{1}{n^4} + \frac{1}{3} x^6 \Sigma \frac{1}{n^6} + \&c.$, oder dieſe Summen durch die Bernoulliſchen Zahlen ausgedrückt, und $\pi x = z$ geſetzt,

$$\log. \frac{z}{\text{ſin.}\ z} = \frac{2 \mathfrak{A}^I}{1.2} z^2 + \frac{2^3 \mathfrak{A}^{II}}{1..4} . \frac{z^4}{2} + \frac{2^5 \mathfrak{C}}{1..6} . \frac{z^6}{3} + \&c.$$

Eben ſo kann man mit dem unendlichen Product verfahren, welches $\text{tang.} \frac{\pi (1 + z)}{4}$ ausdrückt, wobey der allgemeine Factor $= \frac{2n - 1 \pm z}{2n - 1 \mp z}$ iſt (die oberen Zeichen

gelten für ungerade n). — Wenn bey den Progreſſionen in (XIX) die Bögen durch Reihen dargeſtellt werden, die nach Potenzen der Tangenten fortſchreiten, ſo erhält man aus den dortigen Summationen unzählige convergirende Reihen, in denen die Bernoulliſchen Zahlen vorkommen, und deren Summen angegeben werden können. So fließt aus Σ Arc. tang. $\frac{\varphi}{n^2}$ (wenn man $2^2\,\pi^2\,\varphi = z$ ſetzt, und ſtatt der Bernoulliſchen Zahlen die andern A^I, A^{II} u. ſ. w. gebraucht, daß $\frac{\mathfrak{A}^N}{1.2.3..2n} = A^N$ werde *)) folgende Summation:

$$A^I z - \frac{1}{3} A^{III} z^3 + \frac{1}{5} A^V z^5 - \&c. = \frac{\pi}{2}$$

$$- 2\,\text{Arc. tang.} \left(\frac{e^{\sqrt{\frac{z}{2}}} - 1}{e^{\sqrt{\frac{z}{2}}} + 1} \cdot \cot. \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{2}} \right)$$

Ueberhaupt erhält man ſo die Summen aller Reihen von der Form: $A^M z - \frac{1}{3} A^{3M} z^3 + \frac{1}{5} A^{5M} z^5 - \frac{1}{7} A^{7M} z^7 + \&c.$, welche ſich von den vorhergehenden, und denen, welche **Euler** betrachtet hat, dadurch ſehr unterſcheiden, daß in ihnen nicht alle Bernoulliſche Zahlen vorkommen, ſondern nur die m^{te}, $3\,m^{te}$, $5\,m^{te}$ u. ſ. w. wobey m jede ganze Zahl bedeuten kann: je größer m iſt, deſto ſchneller werden ſie convergiren. Ich ſehe jetzt nicht ein, wie man ſolche Reihen auf einem andern Wege, als dieſem, ſummiren könnte. — Uebrigens laſſen ſich aus dieſer und den vorhin angeführten Reihen durch Differentiation und Integration noch andere

*) Vergl. Euler I. C. D. Cap. V. P. II. p. 425.

Summationen herleiten. Das allgemeine bey dieſem Reductions-Verfahren, wovon im vorhergehenden mehrere Beyſpiele dargelegt ſind, zeigt nachfolgende Unterſuchung, welche zugleich noch zu einem andern Zwecke dient.

XXI. Reduction von Reihen mit Coſinuſſen und Sinuſſen auf andere, welche nach Potenzen von x fortgehen, und allgemeine Bemerkungen über die letztern Reihen.

1) Alle Reihen, deren allgemeines Glied = iſt a^N. coſ. $n\varphi$, oder a^N. ſin. $n\varphi$; mit gleichen oder abwechſelnden Zeichen, werden durch die in (XV.) gebrauchte Subſtitution: $e^{\varphi\sqrt{-1}} = x$, in zwo andere verwandelt, deren eine zum allgemeinen Gliede $a^N x^n$ hat, die andere $a^N x^{-n}$. Es kommt alſo im allgemeinen darauf an, $\Sigma\, a^N x^n$ zu finden. Für den Fall, da a^N eine ganze Function von n vorſtellt, iſt dieſe Unterſuchung in (XV.) ausgeführt und angewandt. Iſt aber a^N eine gebrochne Function, ſo läßt ſich $\Sigma\, a^N x^n$ immer auf rationelle Integrale zurückbringen. Dieſes hat **Euler** zuerſt vollſtändig gelehrt *). Eh ich ſein Verfahren kennen lernte, erhielt ich jene Summation, und damit noch die Aufloͤſung eines andern Problems, durch folgende Schlüſſe, welche ich hier beyfüge, weil man daraus, wie es mir vorkommt, die ganze Sache in gehöriger Allgemeinheit

*) Comment. Petrop. T. VII. (vergl. T. VI. u. V). Einzelne Fälle des Problems haben ſchon Jac. Bernoulli, Moivre u. a. aufgelöſt. Euler hat, wie gewöhnlich, die Unterſuchungen ſeiner Vorgänger, allgemeiner gemacht, und was bey jenen iſolirter Gedanke war, in analytiſche Methode verwandelt.

und Kürze überſieht, auch einen vielleicht noch nicht hinlänglich bemerkten Zuſammenhang zwiſchen Reihen und Integrationen gewahr wird.

2) Es iſt bekannt, daß wenn die Summe der unendlichen Reihe: $a + a^{I} x + a^{II} x^2 \ldots + a^{N} x^4 + \&c. = S = \Sigma a^N x^n$ (Σ hier von $n = 0$ an gerechnet) als gegeben vorausgeſetzt wird, daraus auch dieſe Reihe ſummirt werden könne: $a A + a^{I} A^{I} x + a^{II} A^{II} x^2 + \ldots + a^N A^N x^n + \&c. = Z$, ſo oft A, A^{I}, A^{II} u. ſ. w. auf verſchwindende Unterſchiede führen, d. i. A^N eine ganze Funktion von n iſt. Es wird nemlich

$$Z = AS + \Delta A . \frac{x \, d S}{1 . d x} + \Delta^2 A . \frac{x^2 \, d^2 S}{1 . 2 . d x^2} + \&c.$$

Von der Wahrheit und Allgemeinheit dieſes Satzes überzeugt man ſich leicht, wenn man $A^N = A + n \Delta A + \frac{n(n-1)}{1 . 2} \Delta^2 A + \&c.$ ſetzt. Dadurch erhält man für $Z = \Sigma a^N A^N x^n$ einen zuſammengeſetzten Ausdruck, in welchem mehrere Summen vorkommen, alle von der Form: $\Sigma a^N x^n n(n-1) \ldots (n-m)$ $= x^m \Sigma a^N . x^{n-m} . n(n-1) \ldots (n-m) = \frac{x^m d^m S}{d x^m}$; der allgemeine Coefficient iſt $= \frac{\Delta^m A}{1 . 2 \ldots m}$ *).

3) Dieſer Satz kann nach vielen Rückſichten als Fundamental-Gleichung in der Lehre von den Reihen betrachtet werden. Setzt man in (2) $a^N = 1$, ſo wird $S = \frac{1}{1 - x}$, woraus unmittelbar $\Sigma A^N x^n$ folgt, d. i.

*) Man vergleiche damit Eulers Beweis I. C. D. p. 311 u. ſ. w.

die Summation aller Reihen, deren Glieder nach Potenzen von x fortgehen, und Coefficienten enthalten, welche für ſich eine algebraiſche Progreſſion von irgend einer Ordnung bilden. Setzt man $S = \left(x + \frac{1}{x}\right)^r$, ſo iſt das Problem in (VII.) auch unter dem Satze in (2) begriffen. Man erhält ſo einen Ausdruck für die Summe der dortigen Reihe, worin außer Differential-Verhältniſſen von S, noch die Differenzen von r^q, $(r - 2)^q$, $(r - 4)^q$ u. ſ. w. vorkommen. Dieſe Unterſuchung kann man mit der in (VII.) verbinden, woraus ſich Ausdrücke der Differenzen durch Summen ergeben *).

4) Nun ſey a^N in (1) $= \frac{\mathfrak{A}^N}{A^N}$, oder irgend eine gebrochne Funktion des Index n, ſo iſt Z bekannt (nach 3. weil $a^N A^N = \mathfrak{A}^N$ eine ganze Function iſt), und (nach 1) wird S geſucht. Dadurch iſt das Problem in (2) umgekehrt und auf eine Differential-Gleichung von einem höhern Grade gebracht. Dieſe iſt derjenigen ähnlich, welche **Euler** (Inſt. Calc. Int. P. II. p. 471-525.) unterſucht hat: auch **d'Alembert** und **de la Grange**. Dieſe Unterſuchungen ließen ſich hier anwenden: ſie werden aber hier entbehrlich oder erſetzt, durch folgende Be-

*) Vergl. Euler Inſt. C. D. p. 17, wo ſolche Ausdrücke vorkommen, jedoch nicht ganz richtige, vielleicht wegen eines Rechnungsfehlers. Die r^{te} unter den dortigen Größen α, β, γ u. ſ. w. womit α übereinſtimmt, aber nicht β, γ, u. ſ. w. iſt eigentlich

$$= m^{m+r-1} - \frac{m.}{1.}(m-1)^{m+r-1}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1 . 2}(m-2)^{m+r-1} - \&c.$$

trachtung, welche ich deswegen anſtellte, weil mir jene noch unbekannt waren. Wenn nemlich $\Delta^2 A = 0$, ſo iſt die Differential-Gleichung vom erſten Grade, und ihre Integration leicht *). Daraus läßt ſich, wenn A^N nur die erſte Potenz von n enthält, oder $= \alpha + \beta n$ iſt, S aus Z finden, d. i. $\Sigma \frac{\mathfrak{A}^N}{\alpha + \beta n}$ aus $\Sigma\, \mathfrak{A}^N$, wobey $\mathfrak{A}^N$ nicht gerade eine ganze Function ſeyn muß. Nun kann man immer A^N, wenn die Dimenſion von n größer als 1 iſt $= m$, in m einfache Factoren $\alpha + \beta n, \gamma + \delta n$ &c. zerfällen. So folgt für $m = 2$, $\Sigma \frac{\mathfrak{A}^N}{(\alpha + \beta n)(\gamma + \delta n)}$ aus der nur gefundenen Summe, wenn das nunmehr gefundene S ſtatt des bekannten Z, oder $\frac{\mathfrak{A}^N}{\alpha + n\beta}$ vor $\mathfrak{A}^N$ genommen wird. Auf ähnliche Art ergibt ſich die Summe für $m = 3$ aus der nur gefundenen für $m = 2$, und ſo endlich die allgemeine Auflöſung: es wird nemlich immer die zuletzt gefundene Summe als das bekannte Z angeſehen. — Man kann durch Diviſion mit der beſtändigen Größe $\mathfrak{C} = \beta . \delta . \varepsilon .$ &c. der Function A^N die Geſtalt geben, daß der Coefficient der höchſten Potenz von n, $= 1$ werde, oder die Factoren alle die Form $n + F$ erhalten. Man nenne den erſten $n + f^M$, den zweyten $n + f^{M-1}$ .... den letzten oder $m^{ten} = n + f^1$, ſo fließt aus den angezeigten Gründen leicht folgender allgemeiner Ausdruck: $S = \Sigma \frac{\mathfrak{A}^N x_n}{A^N} =$

*) Käſtners Anfangsgr. d. Analyſ. d. Un. §. 412; das dortige n iſt hier $= 0$, welches der einfachſte Fall iſt.

$$= \frac{1}{\mathfrak{C}} . x^{-f^{I}} . \int . x^{f^{I} - f^{II} - 1} . \, d x . \int . \, . \, . \, . \, . \, . \, .$$

$$\int . x^{f^{M-1} - f^{M} - 1} . \, d x \int . x^{f^{M} - 1} . \, Z \, d x$$

wobey $Z = \Sigma \mathfrak{A}^{N} x^{n}$ iſt. Man kann dieſes zuſammengeſetzte Integral leicht in eine Summe von einfachen auflöſen: es iſt nemlich überhaupt $\int . x^{p} \, d x \int . P \, d x = \frac{x^{p+1}}{p+1} \int . P \, d x - \frac{1}{p+1} . \int . x^{p} P \, d x$. Unmittelbar erhält man einen Ausdruck in ſolchen einfachen Integralen, wenn man $\frac{1}{A^{N}}$ in Partialbrüche mit einfachen Nennern auflöſt: welche Betrachtung auch gleich Anfangs zum Grunde gelegt, und ſo der Fall, da A^{N} mehrere Factoren hat, auf den einfachſten Fall eines einzigen Factors zurückgeführt werden kann (wovon die Unterſuchung in XII. ein Beyſpiel giebt).

5) Aus dem bisher geſagten überſieht man, wie, die Summe dieſer Reihe: $a + a^{I} x + a^{II} x^{2} + \ldots + a^{N} x^{n} + \ldots$ angenommen, unzählige andere Reihen ſummirt werden können, welche entſtehen, wenn man die Coefficienten von jener multiplicirt oder dividirt (oder beydes zugleich) mit ſolchen Größen, die für ſich eine willkürliche algebraiſche Progreſſion bilden: d. i. auf verſchwindende Unterſchiede führen. Die Summation, welche (1) fordert, fließt als ein beſonderer Fall aus dieſem allgemeineren Satze, wenn nemlich $a^{N} = 1$ geſetzt wird. Dieſe Vorſtellung (wie auch 3.) beſtätigt die obige Bemerkung (S. 90. **), daß die aus dem Bruche $\frac{1}{1+x}$

H

entſpringende Reihe den erſten Grund aller Summationen dieſer Art enthalte.

6) Zugleich führen jene Betrachtungen auf einem einfachen Wege zu der Integration der vorerwähnten Differential-Gleichung. Der Ausdruck in (4) iſt nemlich das vollſtändige Integral der Gleichung in (2). Man gebe der Differential-Gleichung, von einem willkürlichen Grade, dieſe Form: $Z = By + \frac{Cx\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{Dx^2\,\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \&c.$ ſo folgt aus der Vergleichung mit den dortigen Buchſtaben $B = A$, $C = \Delta A$, $D = \frac{\Delta^2 A}{1.2}$, $E = \frac{\Delta^3 A}{1.2.3}$ u. ſ. w. Alſo wird, was ſeither A^N war, $= A + n\Delta A + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 A + \&c. = B + nC + n(n-1)D + n(n-1)(n-2)E + \&c.$ Dieſe Größe iſt $= E(f^I + n)(f^{II} + n)\ldots(f^M + n)$. Setzt man vor n, $n-1$, ſo werden die Factoren des Ausdrucks: $B + (n-1)C + (n-1)(n-2)D + \&c.$, $= f^I - 1 + n, f^{II} - 1 + n$, u. ſ. w. Auf dieſe Weiſe ſtimmt gegenwärtige Integration mit derjenigen vollkommen überein, welche **Euler** aus andern Gründen gefunden hat (p. 495). Zugleich erhellt aus (4) wie man y ſogleich durch einfache Integrale ausdrücken kann, ohne Verwandlungen mit den zuſammengeſetzten vornehmen zu müſſen.

7) In der Anwendung des bisherigen auf Progreſſionen mit Coſinuſſen und Sinuſſen vielfacher Bögen. wird alſo nach (1) die Summation der Reihen mit dem allgemeinen Gliede: $a^N . \text{coſ.}\, n\varphi$, oder $a^N . \text{ſin.}\, n\varphi$ (wenn a^N

irgend eine gebrochne Function von n, und $n+f$ einen von den Factoren ihres Nenners vorſtellt) zurückgebracht auf die Summe oder Differenz zweyer Integrale von der Form: $x^{-f}\int.\frac{x^f\,dx}{1\pm x}$, $z^{-f}\int.\frac{z^f\,dz}{1\pm z}$ $x=e^{\phi\sqrt{-1}}$, und $z=\frac{1}{x}$ geſetzt (der beſtändige Coefficient iſt aus der Zerfällung von a^N bekannt, im Nenner gilt das obere Zeichen, wenn in der Reihe die Zeichen abwechſeln, ſonſt das untere). Durch gehörige Verwandlungen ergibt ſich die Summe der Integrale =

$$-\cos.f\phi.\int.d\phi.\sec.\tfrac{1}{2}\phi.\sin.(f+\tfrac{1}{2})\phi$$
$$+\sin.f\phi.\int.d\phi\sec.\tfrac{1}{2}\phi.\cos.(f+\tfrac{1}{2})\phi,$$

für abwechſelnde Zeichen; für gleiche muß in den Integralen ſec. mit coſec., im erſten Theil ſin. mit coſ., im andern coſ. mit ſin. verwechſelt, auch der letztere verneint genommen werden: die Factoren der Integrale bleiben. Eben ſo wird die Differenz jener Integrale durch $\sqrt{-1}$ dividirt, $=\sin.f\phi.\int.d\phi\sin.(f+\frac{1}{2})\phi.\sec\frac{1}{2}\phi$ $+\cos.f\phi.\int.d\phi.\cos.(f+\frac{1}{2})\phi.\sec.\frac{1}{2}\phi$, für abwechſelnde Zeichen; für gleiche wird die nur erwähnte Veränderung vorgenommen. Daraus folgen z. B. vermittelſt gehöriger Beſtimmung der Conſtanten, die Summationen in (XI).

8) Man kann das Verfahren in (I.) auch umkehren, und aus der bekannten Summe einer Reihe von Coſinuſſen und Sinuſſen, $\Sigma(a^N x^n \pm a^N x^{-n})$ herleiten. Da in (III. 5.) $\Sigma\pm\frac{\cos.n\phi}{n^{2m}}$ gefunden iſt, ſo

ergibt ſich daraus $\Sigma \pm \frac{x^n}{n^{2m}} + \Sigma \pm \frac{x^{-n}}{n^{2m}} = \mathfrak{S}$, wenn man $e^{\varphi\sqrt{-1}} = x$, oder $\varphi = \frac{\log. x}{\sqrt{-1}}$ ſetzt. Da jener Ausdruck nur gerade Potenzen von φ enthält, ſo wird die letztere Summe möglich, nemlich

$$\frac{\mathfrak{S}}{2} = \Sigma \pm n^{-2m} + \frac{(\log. x)^2}{1.2}\, \Sigma \pm n^{-2m+2} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(\log. x)^{2m-2}}{1..2m-2} . \Sigma \pm n^{-2} + \tfrac{1}{2}\, \frac{\log. (x)^{2m}}{1..2m} .$$

Daraus erhellt, daß zu jedem Werthe von x, für welchen die Summe der unendlichen Reihe: $x - \frac{x^2}{2^{2m}} + \frac{x^3}{3^{2m}} - \frac{x^4}{4^{2m}} + \&c.$ bekannt iſt, ein anderer, nemlich der reciproke $\frac{1}{x}$ gehöre, welcher auch eine Summe zuläßt, die aus jener durch Logarithmen, π und die Bernoulliſchen Zahlen gefunden werden kann Aus dem vorhergehenden iſt $\Sigma \pm \frac{x^n}{n^{2m}}$ nur für $x = 1$ bekannt, wo auch $\frac{1}{x} = 1$ wird. Wenn der Exponent der Potenzen im Nenner $= 2$ iſt, ſo läßt ſich $\Sigma \pm \frac{x^n}{n^2}$ noch für $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ angeben, $= \frac{\pi^2}{15} - \frac{1}{2}(\log. x)^2$: dann iſt $z = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$. Mithin wird auch für dieſen Werth von z, die Summe $\Sigma \pm \frac{z^n}{n^2}$ bekannt, und zwar $= \frac{\pi^2}{10} + (\log. z)^2$. — Eben

ſo folgt aus $\Sigma \frac{\text{coſ.}\, n\varphi}{n^{2m}}$ (in III.), $\Sigma \frac{x^n}{n^{2m}} + \Sigma \frac{x^{-n}}{n^{2m}}$, aber, wie man leicht ſehen wird, unmöglich ausgedrückt. So oft alſo die eine Summe bekannt iſt, wird es auch die andere werden. Jenes findet, bey $m = 1$, ſtatt für $x = \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, in welchen Fällen $\Sigma \frac{x^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log. 2)^2; \frac{\pi^2}{15} - \left(\log. \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2; \frac{\pi^2}{30} - \left(\log. \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$ *). Daraus erhält man dieſe Summe auch für $x = 2, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, aber durch unmögliche Ausdrücke: es iſt nemlich allgemein

$$\Sigma \left(\frac{x^n}{n^2} + \frac{x^{-n}}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi \log. x}{\sqrt{-1}} - \frac{(\log. x)^2}{2}.$$

Es wird vielleicht auf den erſten Anblick paradox ſcheinen, daß ſo einfache Reihen, als die gegenwärtigen, für gewiſſe Werthe von x unmögliche Summen haben ſollen. Eigentlich ſind, für die angezeigten Werthe, die Reihen divergent, und haben keine wahre Summen: die auf die erwähnte Weiſe gefundene Ausdrücke ſind nur analytiſch wahr. So werden z. B. die Summen der Reihen, welche $\sqrt{(1-x)}$, $\log.(1-x)$, Arc. ſin. x, ausdrücken, unmöglich, wenn $x > 1$ iſt. — Uebrigens erhellt, daß aus den Reihen mit Sinuſſen, und aus denen, wo nur ungerade Zahlen vorkommen, ähnliche Sätze können hergeleitet werden.

*) Dieſe Particular-Werthe hat J. Landen zuerſt bemerkt (Mathematical Memoirs 1780). Den Fall $x = \frac{1}{2}$ lehrt auch Euler Inſt. C. J. P. I. p. 126.

XXII. Zuſatz zu (III.), nebſt einer allgemeinen Integrations-Formel.

1) In (III) habe ich, um die Reihen mit gleichen Zeichen aus denen mit abwechſelnden herzuleiten, vor φ, $\pi - \varphi$ geſetzt. So einfach das iſt, ſo könnte man doch, zumal durch die Bemerkungen in (IV) veranlaßt, zu wiſſen verlangen, was aus der unmittelbaren Anwendung des dortigen Verfahrens auf Reihen jener Art folge. Die Reihe: $\sin.\varphi + \frac{\sin.2\varphi}{2} + \frac{\sin.3\varphi}{3} +$ &c. verwandelt ſich in dieſe:

$$\varphi\,\Sigma\,1 - \frac{\varphi^3}{1.2.3}\,\Sigma\,n^2 + \frac{\varphi^5}{1..5}\,\Sigma\,n^4 - \&c.,$$

die Coefficienten ſind hier unendlich, aber die Summe der Reihe wird endlich. Da $\Sigma\,\frac{\sin.n\varphi}{n}$, bekanntermaßen, $= \frac{\pi}{2} - \varphi\,\Sigma \pm 1$ iſt, ſo muß dargethan werden, daß

$$\frac{\pi}{2} = \varphi(\Sigma 1 + \Sigma \pm 1) - \frac{\varphi^3}{1.2.3}\,\Sigma n^2 + \frac{\varphi^5}{1..5}\,\Sigma n^4 - \&c;$$

n bedeute eine unendliche Größe, ſo wird, was in φ multiplicirt iſt, $= n$ (wovon man ſich überzeugt, wenn man die Reihen: $1 + 1 + 1 +$ &c.; $1 - 1 + 1 +$ &c. ins unendliche fortgeſetzt, zuſammen addirt), für die übrige Summen wird überhaupt $\Sigma\,n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}$. Nun ſey $n\varphi = z$, ſo verwandelt ſich jene Gleichung in dieſe:

$$\frac{\pi}{2} = z - \frac{z^3}{3.1.2.3} + \frac{z^5}{5.1..5} - \&c,$$

und es kommt nur darauf an, die Summe der Reihe auf der einen Seite des Gleichheitszeichens für $z = \infty$ zu finden. Dieſelbige iſt allgemein

$= \int . \frac{d z}{z} \sin. z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \int . \frac{d z}{z} \left(e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}} \right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \int . \frac{d x}{\log. x} \left(1 - x^{-2} \right)$, wenn $e^{z\sqrt{-1}} = x$ iſt. Dieſes Integral iſt unter nachfolgendem begriffen: $\int . \frac{d x}{\log. x} (x^{\alpha} - x^{\beta})$, deſſen Werth von $x = 0$ bis zu $x = 1$, $=$ iſt $\log. \left(\frac{\alpha + 1}{\beta + 1} \right)$ *). Daraus wird jenes, in eben dem Sinne, $= \frac{1}{2\sqrt{-1}} . \log. -1 = \frac{\pi}{2}$, alſo $= -\frac{\pi}{2}$, von $x = 1$ bis zu $x = 0$ **), d. i. von $z = 0$ bis zu $z = -\infty$, oder $= +\frac{\pi}{2}$ von $z = 0$ bis zu $z = +\infty$: wie die erwähnte Gleichung erfordert. Auf ähnliche Art, nur mit mehr Weitläufigkeit, können auch die Fälle betrachtet werden, da im Nenner höhere Potenzen vorkommen.

2) Die bey dieſer einigermaßen ſchlüpfrigen Unterſuchung zum Grunde gelegte Summation: $\Sigma n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}$ welche auf den erſten Blick wenig brauchbar zu ſeyn ſcheint, läßt ſich auch noch auf folgende Weiſe nützlich anwenden. Es ſey y irgend eine Function von x, oder geometriſch ausgedrückt, die Ordinate einer krummen Linie, für die Abſciſſe x, ſo iſt $\int . y \, d x$ die zwiſchen denſelben und der krummen Linie enthaltene Fläche. Man ſtelle ſich die Abſciſſe in unzählige unendlich kleine Theile alle $= d x$ getheilt vor, daß $n \, d x = x$ werde, wo n eine unendlichgroße Zahl iſt: fer-

*) Nov. Comment. Petrop. Tom. XX.

**) Die Werthe von $\int . X d x$, von $x = 0$ bis zu $x = 1$, u. von $x = 1$ bis zu $x = 0$, machen zuſammen 0 aus.

ner ſeyen ${}^{I}y$, ${}^{II}y$... die vor y vorhergehenden Ordinaten, welche zu $x - dx$, $x - 2\,dx$ u. ſ. w. gehören, ſo wird $\int y\,dx = {}^{I}y\,dx + {}^{II}y\,dx + {}^{III}y\,dx + \&c. = dx\,\Sigma\,{}^{N}y$.

Nun iſt für jedes n, ${}^{N}y = y - n\,dy + \frac{n^2\,d^2y}{1.2} - \frac{n^3\,d^3y}{1.2.3} + \&c.$ Alſo wird: $\int y\,dx =$

$$dx\left(y\Sigma 1 - dy\Sigma n + \frac{d^2y}{1.2}\Sigma n^2 - \frac{d^3y}{1.2.3}\Sigma n^3 + \&c.\right)$$

Drückt man hier Σn^m durch $\frac{n^{m+1}}{m+1} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\,dx^{m+1}}$ aus, ſo ergibt ſich daraus $\int y\,dx = yx - \frac{x^2\,dy}{1.2.dx} + \frac{x^3\,d^2y}{1.2.3.dx^2} - \frac{x^4\,d^3y}{1..4.dx^3} + \&c.$, eine bekannte allgemeine Integralformel, welche ſchon **Joh. Bernoulli** gelehrt hat, und wodurch alle Differential-Ausdrücke, in welchen nur **eine** veränderliche Größe vorkommt, wenigſtens durch unendliche Reihen können integrirt werden *).

*) Zu dieſem Verfahren wurde ich durch einige Aeußerungen in Lamberts Briefwechſel mit Holland veranlaßt. Jener ſagt, die Integralrechnung, als directe Methode, ſey noch nicht erfunden, weil man nichts integriren könne, als wenn man es vorher differentiirt habe. (S. 70. I. B.). Dieſer bemerkt, von einer allgemeinen Methode, jedes Differential auf einmal zu integriren, ſey noch nicht das mindeſte bekannt: wenn P ein zuſammengeſetzter Ausdruck ſey, ſo laſſe ſich $\int P\,dx$ deswegen nicht auf einmal finden, weil man mit mehrerlei krummen Linien zu thun habe, deren Ordinaten die Theile von P vorſtellen. — Bei obigem Verfahren kann y auch zuſammengeſetzt ſeyn, und doch läßt ſich $\int y\,dx$ aus der Betrachtung einer krummen Linie herleiten. — Uebrigens iſt daſſelbe in den Gründen nicht neu, ſondern ſelbſt mit einem von denjenigen übereinſtimmend, die ſchon vor der Erfindung der Infiniteſimalrechnung ſind gebraucht worden. Man wußte nemlich, auch auf andere Art, wenigſtens bei ganzen rationellen Functionen, zu differentiiren und zu integriren, geraume Zeit vorher, ehe man dieſe Wörter und Zeichen oder die Engliſchen gebrauchte. Auch iſt es eigentlich nicht das, was Neutons oder Leibnizens Verdienſt in dieſer Sache ausmacht.

Berlin, gedruckt bei Ludwig Philipp Wegener.

Pfaff, Johann Friedrich,

Versuch einer neuen Summationsmethode nebst andern damit zusammenhängenden analytischen Bemerkungen

Berlin 1788

Math.p. 422
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082569-8
VD18 11361344